詳細解答

STEP III 2005，第 9 題

力學 • 碰撞與恢復係數

STEP III 2005，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

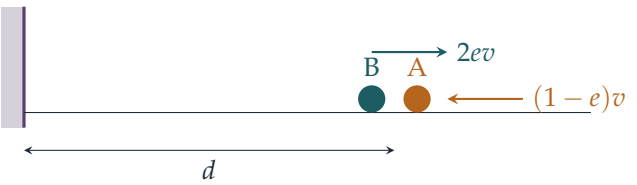
step.maths.org/questions/05-s3-q9

關鍵思路

這兩個質量看似古怪，其實是特意選定的，好讓第一次碰撞得出非常整齊的答案。求出第二次碰撞之後，把它發生前一刻的速度與第一次碰撞前一刻的速度比較：兩者相同，只是各自乘以 e。碰撞定律對速度而言是線性（linear）的，所以整個過程會以較小的尺度重演，其後的每一次碰撞也就一併得出。

解答

我們把 A 和 B 視為光滑水平直線上的質點（particle），每次碰撞均應用牛頓實驗定律（Newton's experimental law）。取朝向牆壁的方向為正，距離則由牆壁量起。



（圖中所示為第一次碰撞前的一刻，兩個質點畫得稍為分開。）

第一次碰撞

設碰撞後 A 和 B 的速度（朝向牆壁）分別為 v_A 和 v_B。碰撞前，A 的速度為 $(1-e)v$，B 的速度為 $-2ev$。

由動量守恆（conservation of momentum）得

$$\begin{aligned}4em\,v_A + (1-e)^2 m\,v_B &= 4em(1-e)v - (1-e)^2 m\cdot 2ev \\ &= 2e(1-e)v[2-(1-e)]m = 2e(1-e)(1+e)v\,m.\end{aligned}$$

接近速率（speed of approach）為 $(1-e)v + 2ev = (1+e)v$，故由牛頓定律得

$$v_B - v_A = e(1+e)v.$$

把 $v_B = v_A + e(1+e)v$ 代入動量方程，再除以 m：

$$[4e + (1-e)^2]v_A = 2e(1-e)(1+e)v - (1-e)^2 e(1+e)v = e(1-e)(1+e)v[2-(1-e)].$$

由於 $4e + (1-e)^2 = (1+e)^2$，右方等於 $e(1-e)(1+e)^2 v$，因此

$$v_A = e(1-e)v, \qquad v_B = e(1-e)v + e(1+e)v = 2ev.$$

兩者皆為正數：碰撞後，**A 以速率** $e(1-e)v$ **朝向牆壁運動，B 以速率** $2ev$ **朝向牆壁運動**。

第二次碰撞

B 較快，所以會拋離 A，並在時間 $t_1 = d/(2ev)$ 之後到達牆壁。在這段時間內，A 移動了 $e(1-e)v \cdot \frac{d}{2ev} = \frac{1}{2}(1-e)d$，所以 A 與牆壁的距離為

$$d - \tfrac{1}{2}(1-e)d = \tfrac{1}{2}(1+e)d$$

。B 以速率 $e\cdot 2ev = 2e^2 v$ 反彈，此時正遠離牆壁，而 A 仍以速率 $e(1-e)v$ 朝向牆壁運動。兩者互相接近，接近速率為 $e(1-e)v + 2e^2 v = e(1+e)v > 0$，所以它們必定再次相遇（而且是在 A 到達牆壁之前，因為 B 位於 A 與牆壁之間）。所需時間為

$$t_2 = \frac{\frac{1}{2}(1+e)d}{e(1+e)v} = \frac{d}{2ev},$$

其間 B 由牆壁起計移動了 $2e^2 v \cdot \frac{d}{2ev} = ed$。所以**第二次碰撞確會發生，位置距離牆壁** de，正如題目所求。

其後的碰撞

> **想一想** 怎樣才能不必把所有功夫重做一遍，便推斷出還有更多碰撞？

考察第二次碰撞前一刻的狀態：A 以速率 $e(1-e)v$ 朝向牆壁運動，B 以速率 $2e^2 v = 2e(ev)$ 遠離牆壁。這正好是把 v 換成 ev、把 d 換成 de 之後的初始狀態（質量和 e 均不

變）。上文所做的一切對任何 $v > 0$ 和 $d > 0$ 都成立，所以把 (v, d) 換成 (ev, de) 後，同一論證依然適用：第三次碰撞會發生，位置距離牆壁 $(de)e = de^2$，而它發生前一刻的狀態就是取 (e^2v, de^2) 的初始狀態。由歸納法（induction）可知，對每個 n 都有第 $(n+1)$ 次碰撞，所以碰撞會永遠持續下去。

第 n 次碰撞前一刻的狀態，就是把 v 和 d 分別換成 $e^{n-1}v$ 和 de^{n-1} 的初始狀態，所以

$$\text{第 } n \text{ 次碰撞發生於距離牆壁} de^{n-1} \text{ 之處。}$$

由第二部分可知，由一次碰撞到下一次碰撞所需的時間為 $t_1 + t_2 = d/(ev)$。若由第 n 次碰撞起計，這個時間變成

$$\frac{de^{n-1}}{e \cdot e^{n-1}v} = \frac{d}{ev},$$

與 n 無關。所以相繼兩次碰撞之間的時間全部相等，均為 $d/(ev)$。每一個循環中，距離和速率都按因子 e 縮小，這兩個效應在時間上互相抵銷。

驗算

- 第一次碰撞的動量：取 $e = \frac{1}{2}$、$m = v = 1$，兩個質量分別為 2 和 $\frac{1}{4}$；碰撞前，$2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$；碰撞後，$2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$。相對速率由 $\frac{3}{2}$ 變為 $\frac{3}{4}$，即乘以因子 e。
- 我們以分數作精確運算，就 200 組隨機選取的 e、v、d、m 模擬了這個運動，每組計算八次碰撞：每次碰撞的位置都是 de^{n-1}，而相隔的時間全部是 $d/(ev)$。當 $e = \frac{1}{2}$、$v = d = 1$ 時，碰撞發生於時間 $0, 2, 4, 6$，距離為 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$。

常見錯誤

- 混淆正負號：B 起初是遠離牆壁運動的，所以按我們的約定，它的初速度是負數。
- 忘記牆壁的恢復係數（coefficient of restitution）同樣是 e，所以 B 離開牆壁時的速率是 $2e^2v$，而不是 $2ev$。
- 用蠻力把第二次碰撞重新計算一遍，而沒有留意到當中的縮放關係；這樣做也行得通，但冗長得多，而且容易看漏當中的規律。

STEP 之外

這裏的推論用到線性和自相似性（self-similarity）：若把每個速度都乘以同一個常數，碰撞的方程保持不變，所以一個除尺度外能重現自身的狀態會永遠重複下去。同一想法也是分析彈跳無限多次的球的基礎，更廣泛而言，亦是量綱分析（dimensional analysis）

的基礎。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）正是以這種嚴謹的方式處理碰撞和動量。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。