詳細解答

STEP III 2005，第 8 題

純數學 • 複數與圓

> **STEP III 2005，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q8

關鍵思路

阿根圖（Argand diagram）上的每一個長度，都可以用 $|z|^2 = zz^*$ 化為代數式。一旦得到第一條恆等式，直角就變成畢氏定理（Pythagoras' theorem），而切線（tangent）就變成切線與半徑之間的直角。於是「OA 與圓相切」就化為單獨一條方程，由此定出半徑的平方為 $cc^* - aa^*$。此後，「P 在圓上」與「P' 在圓上」都歸結為同一條方程。

解答

恆等式與直角

由於 $|z|^2 = zz^*$，而且取共軛（conjugate）與減法可以交換次序，

$$\begin{aligned}|a-c|^2 &= (a-c)(a-c)^* = (a-c)(a^*-c^*)\\ &= aa^* + cc^* - ac^* - ca^*,\end{aligned}$$

這正是所要證明的。

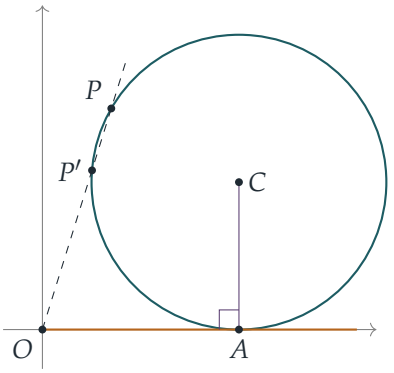
三角形 OAC 的邊長為 $OA = |a|$、$OC = |c|$ 和 $AC = |a-c|$，由於 a, c 非零且互不相同，三者皆不為零。根據畢氏定理及其逆定理（converse），在 A 的角是直角，當且僅當 $OC^2 = OA^2 + AC^2$，即

$$cc^* = aa^* + (aa^* + cc^* - ac^* - ca^*) \iff 2aa^* = ac^* + ca^*.$$

這裏每一步都可逆，所以「當且僅當」成立。

（畢氏定理的逆定理同時排除了退化的「三角形」。假如 O、A、C 共線（collinear），則三個長度之中有一個等於另外兩個之和；當三個長度皆為正數時，這不可能與 $OC^2 = OA^2 + AC^2$ 同時成立。）

相切的圓



切線在切點處與半徑垂直。因此 OA 在 A 與圓相切，即表示角 OAC 是直角，而根據第一部分，

$$2aa^* = ac^* + ca^*. \tag{$*$}$$

半徑 r 滿足 $r^2 = |a-c|^2 = aa^* + cc^* - (ac^* + ca^*) = cc^* - aa^*$，當中用到 $(*)$。(這其實又是畢氏定理：$r^2 = OC^2 - OA^2$。)

設 $k = bb^* > 0$ 及 $s = abc^* + a^*b^*c$。則

$$|ab-c|^2 = (ab-c)(a^*b^* - c^*) = aa^*k - s + cc^*,$$
$$\left|\frac{a}{b^*} - c\right|^2 = \left(\frac{a}{b^*} - c\right)\left(\frac{a^*}{b} - c^*\right) = \frac{aa^*}{k} - \frac{ac^*}{b^*} - \frac{a^*c}{b} + cc^*.$$

把第二式乘以 $k = bb^*$，得

$$k\left|\frac{a}{b^*} - c\right|^2 = aa^* - s + k\,cc^*. \tag{$**$}$$

P **在圓上**。$|ab-c|^2 = cc^* - aa^*$ 成立，當且僅當

$$aa^*k - s + cc^* = cc^* - aa^* \iff aa^*(k+1) = s.$$

P' **在圓上**。$|a/b^* - c|^2 = cc^* - aa^*$ 成立，當且僅當（乘以 $k \neq 0$ 並利用 $(**)$）

$$aa^* - s + k\,cc^* = k\,cc^* - k\,aa^* \iff aa^*(k+1) = s.$$

兩個條件完全相同，所以 P 在圓上當且僅當 P' 在圓上。

逆命題

現在不再假設相切。設圓的圓心為 C 並通過 A，於是 $r^2 = |a-c|^2 = aa^* + cc^* - ac^* - ca^*$。再設 ab 和 a/b^* 都在圓上，其中 $k = bb^* \neq 1$。利用同樣的展開式，

$$aa^*k - s + cc^* = r^2,$$
$$aa^* - s + k\,cc^* = kr^2 \qquad (\text{由 } (**)).$$

從第一條方程減去第二條，便可消去 s：

$$(k-1)\,aa^* - (k-1)\,cc^* = (1-k)\,r^2.$$

> **想一想** 為甚麼題目堅持要 $bb^* \neq 1$？

若 $bb^* = 1$，則 $b^* = 1/b$，於是 $a/b^* = ab$，兩點重合。「兩點都在圓上」這時只是單獨一個條件，當然不足以推出相切。在我們的代數運算中，這正正就是除以 $k-1 \neq 0$ 的那一步：

$$r^2 = cc^* - aa^*.$$

與 $r^2 = aa^* + cc^* - ac^* - ca^*$ 比較，得 $2aa^* = ac^* + ca^*$。根據第一部分，角 OAC 是直角。因此 OA 在圓上的點 A 處與半徑 CA 垂直，即 OA 是圓的切線。

驗算

- 這個結果背後有一個簡潔的幾何原因。由於 $\dfrac{a}{b^*} = \dfrac{ab}{bb^*}$，點 P' 就是把 P 按正實數 $1/|b|^2$ 縮放而得。所以 O、P、P' 共線，且 $OP \cdot OP' = |a|^2 = OA^2$，這正是切割線定理（tangent–secant theorem）（見圖）。
- 數值上，取 $a = 2$、$c = 2 + 1.5\mathrm{i}$（於是 $r^2 = 2.25 = |c|^2 - |a|^2$），以及圓上的 $P = 0.701 + 2.25\mathrm{i}$。則 $b = P/2$ 及 $P' = a/b^* \approx 0.505 + 1.620\mathrm{i}$，而 $|P' - c|^2 \approx 2.250$。
- 我們用電腦以隨機的 a, b, c 驗證了恆等式和相切的情況。另外又取了 1000 個隨機的非相切圓，並設 $|b| \neq 1$：每一次，只要 P 在圓上，P' 就必定不在圓上。

常見錯誤

- 正確寫出 $(a-c)^* = a^* - c^*$，其後卻把 $|a-c|^2$ 展開成 $(a-c)^2$。模（modulus）的平方必須用到共軛。
- 在逆命題中，一開始就假設相切（從而假設 $r^2 = cc^* - aa^*$）。這正是你要證明的結論。只可從 $r = |a-c|$ 出發。
- 除以 $1 - bb^*$ 時沒有說明它為何不等於零。

STEP 之外

由於 $|a|^2/(ab)^* = aa^*/(a^*b^*) = a/b^*$，點 P' 是 P 在 $z \mapsto |a|^2/z^*$ 之下的像。這個映射就是關於圓 $|z| = |a|$ 的反演（inversion）：它把每一點送到由 O 出發的同一條射線上、距離為 $|a|^2/OP$ 的那一點。本題說明，與反演圓正交（orthogonal）的圓會被映射到自身。反演以及由它生成的莫比烏斯變換（Möbius transformations），是大學一年級複分析（complex analysis）和幾何的核心內容。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 用了整整一章的篇幅作出精彩的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。