詳細解答

STEP III 2005，第 7 題

純數學 • 代換積分法

STEP III 2005，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/05-s3-q7

關鍵思路

題目開首的結果告訴我們：只要被積函數（integrand）外面另有一個單獨的因子 $\frac{1}{x}$，藏在被積函數裏的 x^m 就可以當作一個新變數 $u = x^m$ 來處理。因此，對每一個積分，我們先從分母抽出一個因子 x，看看剩下的是哪一個冪 x^m、函數 f 又是甚麼，然後改為計算容易得多的 u 積分。

解答

一般結果

已知 $\mathrm{F}'(u) = \dfrac{1}{u\,\mathrm{f}(u)}$。用鏈式法則（chain rule）對 $\mathrm{F}(x^m)$ 求導（取 $x > 0$，使 x^m 對任何實數 m 都有意義），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{F}(x^m) = \mathrm{F}'(x^m)\cdot mx^{m-1} = \frac{mx^{m-1}}{x^m\,\mathrm{f}(x^m)} = \frac{m}{x\,\mathrm{f}(x^m)}.$$

所以 $\mathrm{F}(x^m)$ 是 $\dfrac{m}{x\,\mathrm{f}(x^m)}$ 的一個原函數（antiderivative），這正是所要證明的結果：

$$\int \frac{m}{x\,\mathrm{f}(x^m)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(x^m) + c.$$

換句話說，這就是把代換（substitution）$u = x^m$、$\mathrm{d}u = mx^{m-1}\,\mathrm{d}x$ 倒過來看。條件 $m \neq 0$ 在下文十分重要：我們將會除以 m。

實際運用時，我們把它寫成

$$\int \frac{1}{x\,\mathrm{f}(x^m)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m}\,\mathrm{F}(x^m) + c. \qquad (*)$$

第 (i) 部分

抽出一個因子 x，

$$\frac{1}{x^n - x} = \frac{1}{x\,(x^{n-1} - 1)}.$$

這符合 $(*)$ 的形式，其中 $m = n - 1$，$\mathrm{f}(u) = u - 1$。我們需要 $n \neq 1$；當 $n = 1$ 時，分母 $x^n - x$ 恆等於零，根本沒有積分可求。

接着要求 F，即 $\dfrac{1}{u(u-1)}$ 的一個原函數。由部分分式（partial fractions）得

$$\frac{1}{u(u-1)} = \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}, \qquad \text{所以} \qquad \mathrm{F}(u) = \ln|u-1| - \ln|u| = \ln\left|\frac{u-1}{u}\right|.$$

把 $u = x^{n-1}$ 代入 $(*)$：

$$\boxed{\int \frac{1}{x^n - x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\ln\left|\frac{x^{n-1}-1}{x^{n-1}}\right| + c, \qquad n \neq 1.}$$

有了絕對值（modulus）符號，這條公式在被積函數有定義的任何區間上都成立（例如在 $0 < x < 1$ 上和在 $x > 1$ 上都成立；當 n 是整數時，在 $x < 0$ 上也成立）。

第 (ii) 部分

這裏把 x 從平方根中抽出來時要小心一點。我們只考慮 $x > 0$，這時 x^n 對每個 n 都有定義，而且 $\sqrt{x^2} = x$。於是

$$\sqrt{x^n + x^2} = \sqrt{x^2\,(x^{n-2} + 1)} = x\sqrt{1 + x^{n-2}},$$

所以被積函數是

$$\frac{1}{x\sqrt{1 + x^{n-2}}},$$

這符合 $(*)$ 的形式，其中 $m = n - 2$，$\mathrm{f}(u) = \sqrt{1+u}$。

? **想一想** 當 $n = 2$ 時會怎樣？

這時 $m = 0$，一般結果並不適用。不過這個積分可以直接計算，十分容易：被積函數是 $\dfrac{1}{\sqrt{2x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\,x}$，所以

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln x + c \qquad (n = 2).$$

當 $n \neq 2$ 時，我們需要 $\mathrm{F}(u) = \displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u$，其中 $u = x^{n-2} > 0$。代入 $t = \sqrt{1+u}$，則 $u = t^2 - 1$，$\mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t$，且 $t > 1$：

$$\int \frac{1}{u\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u = \int \frac{2t}{(t^2-1)\,t}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right),$$

由於 $t > 1$，這裏不需要絕對值符號。這個結果可以化簡得很整齊：把分子和分母同乘以 $t-1$，並利用 $t^2-1=u$，

$$\frac{t-1}{t+1}=\frac{(t-1)^2}{t^2-1}=\frac{\left(\sqrt{1+u}-1\right)^2}{u}, \qquad \text{所以} \qquad \mathrm{F}(u)=2\ln\left(\sqrt{1+u}-1\right)-\ln u.$$

現在把 $u = x^{n-2}$ 代入 $(*)$，其中 $m = n-2$。$-\ln u$ 一項變成 $-(n-2)\ln x$，再除以 $m = n-2$ 便成為 $-\ln x$：

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x^n+x^2}}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n-2}\ln\left(\sqrt{1+x^{n-2}}-1\right)-\ln x+c, \qquad n\neq 2,\ x>0.}$$

答案也可以等價地寫成 $\dfrac{1}{n-2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x^{n-2}}-1}{\sqrt{1+x^{n-2}}+1}\right)+c$；兩種形式都可以。

驗算

- 把答案求導，看看能否還原。對於 (i)，取 $n=2$，公式給出 $\ln|x-1|-\ln|x|$，其導數是 $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2-x}$，正如所料。
- 對於 (i)，取 $n=3$，公式給出 $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^3-x}=\frac{1}{2}\ln\frac{32}{27}\approx 0.084950$，與辛普森法則（Simpson's rule）的結果吻合。
- 對於 (ii)，取 $n=3$，公式給出 $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+x^2}}=\ln\frac{3+2\sqrt{2}}{3}\approx 0.664135$，同樣與數值積分（numerical integration）的結果吻合。我們還用許多不同的 n 值檢驗過這兩條公式，包括負數和非整數的值。

常見錯誤

- 漏掉因子 $\frac{1}{m}$：一般結果的分子有 m，而我們的被積函數沒有，所以必須除以 m。
- 不加說明就寫 $\sqrt{x^2}=x$。這只在 $x\geq 0$ 時成立；當 $x<0$ 時，它等於 $-x$（或寫成 $|x|$）。
- 遺漏例外的值：(i) 中的 $n=1$ 和 (ii) 中的 $n=2$，這時 $m=0$。

STEP 之外

題目開首的結果，其實是從另一面看代換法則：代換不過是把鏈式法則倒過來用，而在大學第一門分析（analysis）課程中，代換法則正是這樣證明的，當中會對所涉及的函數仔細列明假設。像 (ii) 這類含有多項式平方根的積分，會引出一個問題：到底哪些積分

可以用初等函數（elementary functions）表示？例如 $\int \mathrm{d}x/\sqrt{1+x^4}$ 就不可以。如想看微積分基本定理（fundamental theorem of calculus）和代換法則的嚴謹論述，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。