詳細解答

STEP III 2005，第 6 題

純數學 • 解三次方程

> **STEP III 2005，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q6

關鍵思路

恆等式（identity）$4\cosh^3 y - 3\cosh y = \cosh 3y$ 的形狀，與「缺項」三次式（depressed cubic）$x^3 - 3bx$ 完全一樣，只要把 x 乘上適當的常數便可。因此，沒有 x^2 項的三次方程，可以透過與三倍角公式（triple-angle formula）對照來求解，而 arcosh 的對數（logarithm）表達式則把雙曲函數（hyperbolic function）形式的答案變回立方根。求得一個根之後，因式分解（factorisation）便給出另外兩個根所滿足的二次方程，再用單位立方根（cube roots of unity）把它們整理妥當。

解答

雙曲函數形式的根

設 $x = 2a\cosh\frac{1}{3}T$。則

$$\begin{aligned} x^3 - 3a^2x &= 8a^3\cosh^3\tfrac{1}{3}T - 6a^3\cosh\tfrac{1}{3}T \\ &= 2a^3(4\cosh^3\tfrac{1}{3}T - 3\cosh\tfrac{1}{3}T) \\ &= 2a^3\cosh T, \end{aligned}$$

其中用了題目給出的恆等式，並取 $y = \frac{1}{3}T$。所以 $2a\cosh\frac{1}{3}T$ 滿足該方程，這正是所要證明的。

$x^3 - 3bx = 2c$ 的一個根

先假設 $c > 0$。由於 $b > 0$，可取 $a = \sqrt{b} > 0$，使得 $3a^2 = 3b$，而我們需要 $2a^3 \cosh T = 2c$，即

$$\cosh T = \frac{c}{b^{3/2}}.$$

這需要 $c/b^{3/2} \geq 1$，而題目的條件正正用在這裏：$c^2 \geq b^3$ 且 $c > 0$，故 $c \geq b^{3/2}$。所以可取

$$T = \operatorname{arcosh} \frac{c}{b^{3/2}} = \ln\left(\frac{c}{b^{3/2}} + \sqrt{\frac{c^2}{b^3} - 1} \right) = \ln \frac{c + \sqrt{c^2 - b^3}}{b^{3/2}}.$$

因此

$$e^{T/3} = \frac{(c + \sqrt{c^2 - b^3})^{1/3}}{b^{1/2}} = \frac{u}{\sqrt{b}}, \qquad e^{-T/3} = \frac{\sqrt{b}}{u},$$

而根據第一部分，其中一個根是

$$2\sqrt{b} \cosh \tfrac{1}{3}T = \sqrt{b}\left(\frac{u}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{u} \right) = u + \frac{b}{u}.$$

想一想 如果 $c < 0$ 又如何？這時 $c/b^{3/2} \leq -1$，沒有任何實數 T 的 cosh 會等於這個值。

把 x 換成 $-x$：方程變成 $x^3 - 3bx = -2c$，其中 $-c > 0$，所以根據剛才處理過的情況，它有根 $u' + b/u'$，其中 $u' = (-c + \sqrt{c^2 - b^3})^{1/3}$，而 $-(u' + b/u')$ 就是原方程的一個根。現在

$$u^3 u'^3 = (\sqrt{c^2 - b^3} + c)(\sqrt{c^2 - b^3} - c) = (c^2 - b^3) - c^2 = -b^3,$$

所以，取實立方根，得 $u' = -b/u$ 及 $-(u' + b/u') = u + b/u$。因此無論 c 是正是負，公式都成立。（留意在兩種情況下均有 $u \neq 0$，因為當 $b > 0$ 時 $\sqrt{c^2 - b^3} < |c|$。）

另外兩個根

記 $r = u + \frac{b}{u}$。由於 r 是一個根，$x - r$ 是因式，在

$$x^3 - 3bx - 2c = (x - r)(x^2 + rx + q) = x^3 + (q - r^2)x - rq$$

中比較係數（comparing coefficients）（x^2 項自動抵消），必有 $q = r^2 - 3b$。展開得

$$q = u^2 + 2b + \frac{b^2}{u^2} - 3b = u^2 + \frac{b^2}{u^2} - b,$$

所以另外兩個根滿足

$$x^2 + \left(u + \frac{b}{u}\right)x + u^2 + \frac{b^2}{u^2} - b = 0,$$

這正是所要證明的。（作為一致性的檢查，常數項亦吻合：$rq = u^3 + b^3/u^3$，而有理化後 $b^3/u^3 = b^3/(c+\sqrt{c^2-b^3}) = c - \sqrt{c^2-b^3}$，所以 $rq = 2c$。）

要解這個二次方程，記 $v = b/u$，於是 $uv = b$，而二次方程成為

$$x^2 + (u+v)x + (u^2 - uv + v^2) = 0.$$

現在 $\omega^3 = 1$ 且 $1 + \omega + \omega^2 = 0$。試取 $x_1 = \omega u + \omega^2 v$ 和 $x_2 = \omega^2 u + \omega v$：

$$x_1 + x_2 = (\omega + \omega^2)(u+v) = -(u+v),$$
$$x_1 x_2 = \omega^3 u^2 + \omega^2 uv + \omega^4 uv + \omega^3 v^2 = u^2 + (\omega^2 + \omega)uv + v^2 = u^2 - uv + v^2.$$

這正是該二次方程的兩根之和與兩根之積，所以它的根是

$$x = \omega u + \omega^2 \frac{b}{u} \qquad 及 \qquad x = \omega^2 u + \omega \frac{b}{u}.$$

由於 $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 及 $\omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，這兩個根亦可寫成 $-\frac{1}{2}(u + \frac{b}{u}) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(u - \frac{b}{u})\mathrm{i}$。

解 $x^3 - 6x = 6$

這是 $x^3 - 3bx = 2c$，其中 $b = 2$，$c = 3$，而 $c^2 = 9 \geq 8 = b^3 > 0$，所以上述結果適用。這裏

$$u = (3 + \sqrt{9-8})^{1/3} = 4^{1/3} = 2^{2/3}, \qquad \frac{b}{u} = \frac{2}{2^{2/3}} = 2^{1/3}.$$

所以各根為

$$x = 2^{2/3} + 2^{1/3}, \qquad x = -\tfrac{1}{2}(2^{2/3} + 2^{1/3}) \pm \tfrac{\sqrt{3}}{2}(2^{2/3} - 2^{1/3})\mathrm{i},$$

其中那對複數根（complex roots）就是 $\omega\, 2^{2/3} + \omega^2\, 2^{1/3}$ 及其共軛（conjugate）。

驗算

- 實根是 $2^{2/3} + 2^{1/3} \approx 2.847322$，而 $2.847322^3 - 6(2.847322) \approx 23.083930 - 17.083932 \approx 6.0000$。
- 三個根之和應為 0（沒有 x^2 項）：$(u+v) - (u+v) = 0$。它們的積應為 6：$r(u^2 - uv + v^2) = u^3 + v^3 = 4 + 2 = 6$。
- 若 $c^2 = b^3$，則 $u = \sqrt{b} = b/u$，兩個複數根都變成 $-\sqrt{b}$，即一個重根（repeated root），這可由 $x^3 - 3bx - 2b^{3/2} = (x - 2\sqrt{b})(x + \sqrt{b})^2$ 印證。

常見錯誤

- 忘記了 $\cosh T \geq 1$，所以雙曲函數的論證只能直接用於 $c > 0$；$c < 0$ 的情況需要代換 $x \to -x$。

► 把複數根寫成 $\omega u + \omega \frac{b}{u}$：兩個立方根的積必須保持等於 b，所以 ω 的冪相乘必須等於 1。

STEP 之外

這就是三次方程的卡爾達諾公式（Cardano's formula），而 $u + b/u$ 這個形式（其中 u^3 是某個二次方程的根），正是十六世紀最初發現它時的模樣。當 $c^2 < b^3$ 時，雖然三個根全是實數，平方根卻是虛數（即所謂「不可約情況」（irreducible case）），這時便由三角形式 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ 接手。至於一般的五次方程為何沒有這類公式，那就是伽羅瓦理論（Galois theory）的故事了；Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）是很好的入門讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。