詳細解答

STEP III 2005，第 5 題

純數學 • 拋物線的公切線

> **STEP III 2005，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q5

關鍵思路

與其用切點來標記切線（tangent），不如用斜率（gradient）來標記。對每一個斜率 m，拋物線（parabola）都恰好有一條該斜率的切線，而第一部分告訴我們它的 y 軸截距（intercept）。兩條拋物線有一條斜率為 m 的公切線（common tangent），當且僅當這兩個截距相等；於是數公切線的數目，就變成數一條方程的根 m 的數目。這條方程在 $a_1 \neq a_2$ 時是二次方程，在 $a_1 = a_2$ 時是一次方程。

解答

斜率為 m 的切線

$y = ax^2 + bx + c$ 的斜率是 $2ax + b$。由於 $a \neq 0$，它恰好在一點等於 m，即 $x_0 = \dfrac{m-b}{2a}$，而 $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$。該點的切線是 $y - y_0 = m(x - x_0)$，即 $y - mx = y_0 - mx_0$。利用 $m = 2ax_0 + b$，

$$\begin{aligned} y_0 - mx_0 &= ax_0^2 + bx_0 + c - (2ax_0 + b)x_0 \\ &= c - ax_0^2 = c - a \cdot \frac{(m-b)^2}{4a^2} = c - \frac{(m-b)^2}{4a}, \end{aligned}$$

所以在 P 點的切線是 $y - mx = c - \dfrac{(m-b)^2}{4a}$，正如所求。

有公切線的條件

由第一部分，每條曲線都恰好有一條斜率為 m 的切線，分別是

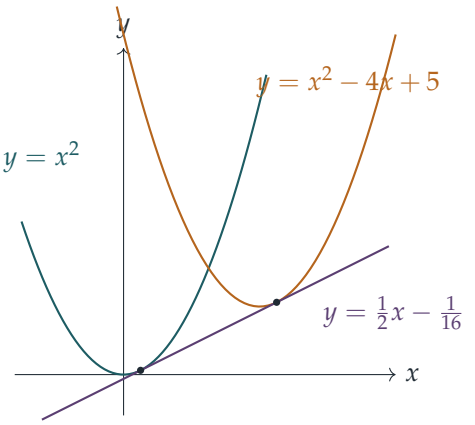
$$y = mx + k_1, \quad k_1 = c_1 - \frac{(m-b_1)^2}{4a_1}, \qquad \text{和} \qquad y = mx + k_2, \quad k_2 = c_2 - \frac{(m-b_2)^2}{4a_2}.$$

兩條斜率相同的直線重合，當且僅當它們的截距相等，所以兩條曲線有一條斜率為 m 的公切線，當且僅當 $k_1 = k_2$。乘以 $4a_1a_2 \neq 0$（這不會改變等式是否成立），

$$\begin{aligned} 4a_1a_2(k_2 - k_1) &= 4a_1a_2(c_2 - c_1) - a_1(m-b_2)^2 + a_2(m-b_1)^2 \\ &= (a_2 - a_1)m^2 + 2(a_1b_2 - a_2b_1)m + 4a_1a_2(c_2 - c_1) + a_2b_1^2 - a_1b_2^2. \end{aligned}$$

因此，有一條斜率為 m 的公切線，當且僅當這個式子等於零，這就是所求的條件。把該條件的左方記作 $Q(m)$。

由於 $Q(m) = 0$ 的每一個根 m 都恰好給出一條公切線，而不同的根給出不同的直線（它們的斜率不同），所以公切線的數目等於 $Q(m) = 0$ 的相異實根的數目。還要留意，公切線不可能是鉛垂的，因為兩條曲線都沒有鉛垂的切線。



兩條滿足 $a_1 = a_2$ 及 $b_1 \neq b_2$ 的拋物線恰好有一條公切線；圖中這條公切線的斜率是 $\frac{1}{2}$。

$a_1 \neq a_2$ 的情況

這時 Q 是一個真正的 m 的二次式，所以它恰好有一個相異實根，當且僅當它的判別式（discriminant）等於零。判別式是

$$\Delta = 4(a_1b_2 - a_2b_1)^2 - 4(a_2 - a_1)(4a_1a_2(c_2 - c_1) + a_2b_1^2 - a_1b_2^2).$$

不含 c 的各項可以化簡得很漂亮：

$$\begin{aligned}&(a_1b_2-a_2b_1)^2-(a_2-a_1)(a_2b_1^2-a_1b_2^2)\\&=(a_1^2b_2^2-2a_1a_2b_1b_2+a_2^2b_1^2)-(a_2^2b_1^2-a_1a_2b_2^2-a_1a_2b_1^2+a_1^2b_2^2)\\&=a_1a_2(b_1^2-2b_1b_2+b_2^2)=a_1a_2(b_1-b_2)^2.\end{aligned}$$

因此

$$\Delta=4a_1a_2\Big[(b_1-b_2)^2-4(a_1-a_2)(c_1-c_2)\Big],$$

而由於 $a_1a_2\neq 0$，恰好有一條公切線，當且僅當

$$(b_1-b_2)^2=4(a_1-a_2)(c_1-c_2). \qquad (*)$$

? **想一想** 兩條曲線相切（touch）究竟是甚麼意思？怎樣把它化成一條方程？

兩條曲線相切，是指它們在某一點相交，而且在該點的斜率相同。設

$$d(x)=(a_1-a_2)x^2+(b_1-b_2)x+(c_1-c_2),$$

即兩個二次式之差。兩條曲線在 x_0 相交，即 $d(x_0)=0$；在該處斜率相等，即 $d'(x_0)=0$。所以它們相切，當且僅當 d 有一個根 x_0 滿足 $d'(x_0)=0$，也就是有重根（repeated root）。由於 $a_1\neq a_2$，d 是二次式，而它有重根，正正是當它的判別式 $(b_1-b_2)^2-4(a_1-a_2)(c_1-c_2)$ 等於零，這就是條件 $(*)$。

所以，當 $a_1\neq a_2$ 時，兩條曲線恰好有一條公切線，當且僅當 $(*)$ 成立，亦即當且僅當它們相切。　　（在這個情況下，唯一的公切線自然就是切點處的切線。）

$a_1=a_2$ 的情況

把共同的值記作 a。Q 的 m^2 項消失，再除以 $a\neq 0$，條件變成

$$2(b_2-b_1)m+4a(c_2-c_1)+(b_1-b_2)(b_1+b_2)=0.$$

- 若 $b_1\neq b_2$，這條一次方程恰好有一個根，

  $$m=\frac{b_1+b_2}{2}-\frac{2a(c_2-c_1)}{b_2-b_1},$$

  所以恰好有一條公切線。

- 若 $b_1=b_2$，條件化為 $4a(c_2-c_1)=0$。若 $c_1\neq c_2$，則完全沒有公切線（其中一條曲線是另一條沿鉛垂方向平移而成，所以它們每個斜率的切線都互相平行而不重合）；若 $c_1=c_2$，則兩條曲線完全相同，每一條切線都是公切線，共有無限多條。

因此，當 $a_1=a_2$ 時，兩條曲線恰好有一條公切線，當且僅當 $b_1\neq b_2$。

驗算

對於 $y = x^2$ 和 $y = -x^2 + 2x - \frac{1}{2}$，兩者之差是 $2(x - \frac{1}{2})^2$，所以它們在 $x = \frac{1}{2}$ 相切；這時 $Q(m) = -2m^2 + 4m - 2 = -2(m-1)^2$，只有一個根 $m = 1$，正是 $y = x^2$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 的斜率。對於圖中的一對曲線 $y = x^2$ 和 $y = x^2 - 4x + 5$，公式給出 $m = -2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$，而兩條切線的截距都是 $-\frac{1}{16}$。我們還用精確運算，以數千組隨機係數驗證了恆等式 $Q(m) = 4a_1a_2(k_2 - k_1)$ 和判別式的化簡。

常見錯誤

- 聲稱 $Q = 0$ 有重根就「表示」兩條曲線相切，卻沒有解釋原因：兩者的關聯要經過另一個二次式 $d(x)$，而把它們連繫起來的正是判別式的恆等式。
- 在 $a_1 = a_2$ 的情況下，遺漏了 $b_1 = b_2$、$c_1 = c_2$ 這個子情況（兩條曲線完全相同，有無限多條公切線），或者答成「$b_1 \neq b_2$ 或 $c_1 \neq c_2$」。

STEP 之外

不用曲線上的點，而用它的一族切線來描述曲線，這就是射影幾何（projective geometry）中對偶性（duality）的想法：圓錐曲線（conic）的切線 $y = mx + k$ 滿足 m 與 k 之間自成一格的二次關係，而兩條處於一般位置的圓錐曲線有四條公切線，正如它們相交於四點一樣。對於兩條對稱軸為鉛垂的拋物線，無窮遠線（line at infinity）與兩者都相切，並佔去了這四條中的兩條，所以餘下的普通公切線最多只有兩條。想做更多同類的題目，可以試試 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（進階數學難題集）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。