詳細解答

STEP III 2005，第 4 題

純數學 • 非線性遞推關係

STEP III 2005，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/05-s3-q4

關鍵思路

這個遞推關係（recurrence relation）並非線性，但它其實是關於相鄰兩項之比的。若寫成 $u_{n+1} = \rho\, u_n$，遞推關係告訴我們下一個比就是 $k - \rho$。因此，這些比在兩個和為 k 的數值之間來回交替，其餘一切皆由此而來。題目的三個特殊情況，也就化為對這兩個比的條件。

解答

歸納法

設 $r = \frac{b}{a}$。把遞推關係兩邊除以 u_{n+1}（當它不等於零時），得

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = k - \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

所以每一個相鄰兩項之比，都等於 k 減去前一個比。第一個比是 $u_2/u_1 = r$，故下一個比應為

$$c = k - \frac{b}{a} = \frac{ka - b}{a}.$$

注意 $c \neq 0$，因為 $b \neq ka$。另外 $r \neq 0$，因為 $b \neq 0$。這兩點合起來保證每一項都不等於零，所以我們永遠不會除以零。

設 $P(n)$ 為命題：$u_{2n-1} \neq 0$ 且 $u_{2n} = r\, u_{2n-1}$。$P(1)$ 成立，因為 $u_1 = a \neq 0$ 且 $u_2 = b = ra$。

假設 $P(n)$ 對某個 $n \geq 1$ 成立。那麼 $u_{2n} = r u_{2n-1} \neq 0$，而由遞推關係得

$$u_{2n+1} = \frac{u_{2n}}{u_{2n-1}}(k u_{2n-1} - u_{2n}) = r\,(k - r)\, u_{2n-1} = (k - r)\, u_{2n} = c\, u_{2n},$$

這正是題目要求的第二條關係式。因此 $u_{2n+1} \neq 0$，並且

$$u_{2n+2} = \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}}(ku_{2n} - u_{2n+1}) = c\,(k-c)\,u_{2n} = (k-c)\,u_{2n+1} = r\,u_{2n+1},$$

因為 $k - c = r$。這就是 $P(n+1)$。根據數學歸納法（induction），對所有 $n \geq 1$，

$$u_{2n} = \frac{b}{a}\,u_{2n-1}, \qquad u_{2n+1} = c\,u_{2n}, \qquad c = k - \frac{b}{a}.$$

想一想 為甚麼要把「$u_{2n-1} \neq 0$」寫進歸納命題之中？

遞推關係要除以 u_n，所以只有當沒有任何一項等於零時，這個數列才有意義。把「不等於零」這一點帶進歸納過程，便可以在證明公式的同時，一併證明各項均有定義。$b \neq 0$ 和 $b \neq ka$ 這兩個條件，正是在這裏用上的。

通項公式

每走兩步，先乘以 c，再乘以 $\frac{b}{a}$，所以 $u_{2n+1} = \frac{bc}{a}\,u_{2n-1}$。奇數項構成一個等比數列（geometric progression），首項為 a，公比為 $\frac{bc}{a}$；而每個偶數項都是它前面那個奇數項的 $\frac{b}{a}$ 倍：

$$u_{2n-1} = a\left(\frac{bc}{a}\right)^{n-1} = \frac{b^{n-1}c^{n-1}}{a^{n-2}}, \qquad u_{2n} = b\left(\frac{bc}{a}\right)^{n-1} = \frac{b^n c^{n-1}}{a^{n-1}}.$$

第 (i) 部分

相鄰兩項之比依次為 $\frac{b}{a}, c, \frac{b}{a}, c, \ldots$，交替出現，所以數列是等比數列，當且僅當 $c = \frac{b}{a}$，即 $k - \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$：

$$ka = 2b.$$

此時公比為 $\frac{b}{a}$。這與 $b \neq ka$ 並無矛盾，因為當 $b \neq 0$ 時，$ka = 2b \neq b$。

第 (ii) 部分

由通項公式可知，對所有 n 都有 $u_{n+2} = \frac{bc}{a}\,u_n$。所以 $u_{n+2} = u_n$ 對所有 n 成立，當且僅當 $\frac{bc}{a} = 1$，即 $b(ka - b) = a^2$：

$$kab = a^2 + b^2.$$

此時數列為 $a, b, a, b, \ldots$。若要求週期（period）恰好是 2（而不是常數數列），還需要 $a \neq b$。若 $a = b$，條件變成 $k = 2$，而每一項都等於 a。

第 (iii) 部分

同理，$u_{n+4} = \left(\frac{bc}{a}\right)^2 u_n$，所以 $u_{n+4} = u_n$ 對所有 n 成立，當且僅當 $\left(\frac{bc}{a}\right)^2 = 1$，即 $\frac{bc}{a} = \pm 1$。取值 $+1$ 就是第 (ii) 部分的情況，週期為 2（或 1）。若要週期恰好是 4，則需要

$\frac{bc}{a} = -1$，即 $b(ka - b) = -a^2$：

$$kab = b^2 - a^2.$$

此時數列為 $a, b, -a, -b, a, b, \ldots$。由於 $a \neq 0$，我們有 $-a \neq a$，所以它的週期確實是 4，而不會更小。

在 (ii) 和 (iii) 兩部分中，條件 $b \neq ka$ 都自動成立。把 $b = ka$ 代入任何一個條件，都會得出 $a^2 = 0$，而這是不可能的。

驗算

試取 $a = 1$，$b = 2$。當 $k = 4$（第 (i) 部分），遞推關係給出 $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$。當 $k = \frac{5}{2}$（第 (ii) 部分），給出 $1, 2, 1, 2, \ldots$。當 $k = \frac{3}{2}$（第 (iii) 部分），給出 $1, 2, -1, -2, 1, 2, \ldots$。我們亦以精確的有理數運算，對大約 2000 組隨機選取的 a、b 和 k 執行了這個遞推關係。每一組的結果都與通項公式吻合，而且數列是等比數列、週期為 2 或週期為 4，恰好就是上述條件成立的時候。

常見錯誤

- 遞推關係要除以 u_n，卻忘記說明為甚麼沒有任何一項會等於零。
- 把 $\frac{bc}{a} = \pm 1$ 當作 (iii) 的答案。$+1$ 的情況週期是 2。
- 在 (ii) 中，沒有留意到 $a = b$、$k = 2$ 會得出常數數列。

STEP 之外

代換 $\rho_n = u_{n+1}/u_n$ 把這個非線性遞推關係化為一階映射 $\rho \mapsto k - \rho$。這個映射是一個對合（involution）：連續施行兩次便會回到起點，這就是為甚麼各個比的週期是 2。透過變數代換來簡化非線性的遞推關係或微分方程（differential equation），是大學一年級的標準技巧；而研究映射的週期軌道（periodic orbit），正是離散動力系統（discrete dynamical systems）的起點。想找更多同類型的題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。