詳細解答

STEP III 2005，第 3 題

純數學 • 二次函數的複合

> **STEP III 2005，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q3

關鍵思路

把兩個首一（monic）二次多項式複合（compose），會得到一個首一四次多項式（quartic），而它的係數是互相牽連的：四個參數 p,q,r,s 要產生四個係數 a,b,c,d，但在其中兩個係數裏，p 和 s 只會以 $2s+p$ 這個組合出現，所以必定有一條關係式要成立。第二種形式其實是同一回事，只是換了個樣子：對外層的二次式配方（completing the square），就把 $\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$ 變成（一個平方）$-$（一個常數）。正是這個形式，讓我們只用二次公式（quadratic formula）就能解出最後的四次方程。

解答

把二次式複合

把 f 中的 x 換成 $\mathrm{g}(x)$，

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(\mathrm{g}(x)) &= (x^2+rx+s)^2 + p(x^2+rx+s) + q \\ &= x^4 + 2rx^3 + (r^2+2s+p)x^2 + r(2s+p)x + (s^2+ps+q).\end{aligned}$$

所以 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d = \mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$ 對所有 x 成立，當且僅當

$$a = 2r, \qquad b = r^2+(2s+p), \qquad c = r(2s+p), \qquad d = s^2+ps+q.$$

必要性（necessity）。若這樣的 p,q,r,s 存在，則 $r=\frac{1}{2}a$ 且 $2s+p = b-r^2 = b-\frac{1}{4}a^2$，所以

$$c = \tfrac{1}{2}a(b-\tfrac{1}{4}a^2), \qquad \text{即} \qquad a^3-4ab+8c=0.$$

充分性（sufficiency）。反過來，假設 $a^3-4ab+8c=0$。取 $r=\frac{1}{2}a$，s 可取任意值（例

如 $s=0$），然後令 $p=b-\frac{1}{4}a^2-2s$ 及 $q=d-s^2-ps$。第一、第二和第四條等式按構造自然成立，而第三條就是 $c=\frac{1}{2}a(b-\frac{1}{4}a^2)$，正是我們的條件移項後的樣子。留意 d 完全不受限制，因為 q 只在常數項中出現。

所以所求的充要條件（necessary and sufficient condition）是

$$\boxed{a^3-4ab+8c=0}$$

（d 可為任意值）。

$(x^2+vx+w)^2-k$ 這個形式

想一想 像 $\mathrm{g}^2+p\,\mathrm{g}+q$ 這樣的和，怎樣才能改寫成一個平方減去一個常數？

把 $\mathrm{g}(x)$ 當作單一個變數，對 g 配方：

$$\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))=(\mathrm{g}(x)+\tfrac{1}{2}p)^2+q-\tfrac{1}{4}p^2=(x^2+rx+s+\tfrac{1}{2}p)^2-(\tfrac{1}{4}p^2-q).$$

現在兩個方向都可以證明了。

若條件成立，由第一部分可得 p,q,r,s 使該四次式等於 $\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$，而上面的式子顯示它等於 $(x^2+vx+w)^2-k$，其中

$$v=r,\qquad w=s+\tfrac{1}{2}p,\qquad k=\tfrac{1}{4}p^2-q.$$

反過來，$(x^2+vx+w)^2-k$ 本身就是 $\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$，其中 $\mathrm{g}(x)=x^2+vx+w$ 而 $\mathrm{f}(x)=x^2-k$（即 $p=0,q=-k,r=v,s=w$）。根據第一部分的必要性論證，條件 $a^3-4ab+8c=0$ 必定成立。

這樣就完成了「當且僅當」（if and only if）的證明。實際運用時，把各個值明確寫出來會方便得多：展開得

$$(x^2+vx+w)^2-k=x^4+2vx^3+(v^2+2w)x^2+2vw\,x+(w^2-k),$$

所以我們需要

$$v=\tfrac{1}{2}a,\qquad w=\tfrac{1}{2}(b-\tfrac{1}{4}a^2)=\tfrac{1}{8}(4b-a^2),\qquad k=w^2-d,$$

而這時 x 的係數是 $2vw=\frac{1}{2}a(b-\frac{1}{4}a^2)$，它恰好在條件成立時等於 c。

解四次方程

這裏 $a=-4,b=10,c=-12,d=4$，而且

$$a^3-4ab+8c=-64+160-96=0,$$

所以這個方法適用。由公式得

$$v = -2, \qquad w = \tfrac{1}{8}(40 - 16) = 3, \qquad k = 3^2 - 4 = 5,$$

而確實有 $(x^2 - 2x + 3)^2 - 5 = x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 4$（值得親手展開一次，以策萬全）。方程變成

$$(x^2 - 2x + 3)^2 = 5 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x + 3 = \sqrt{5} \text{ 或 } x^2 - 2x + 3 = -\sqrt{5}.$$

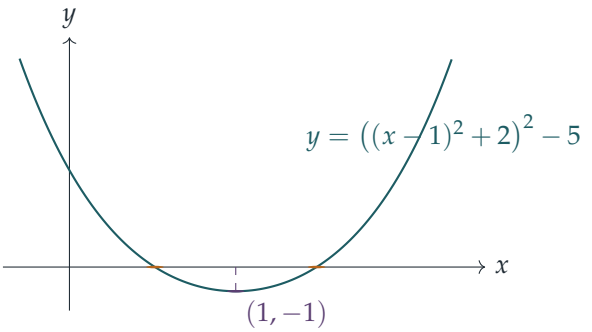
寫成 $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$：

- $(x-1)^2 = \sqrt{5} - 2$。由於 $\sqrt{5} > 2$，右邊是正數，得出兩個實根 $x = 1 \pm \sqrt{\sqrt{5} - 2}$。
- $(x-1)^2 = -2 - \sqrt{5} < 0$，得出一對複數根 $x = 1 \pm \mathrm{i}\sqrt{2 + \sqrt{5}}$。

所以方程的根是

$$\boxed{x = 1 \pm \sqrt{\sqrt{5} - 2}, \qquad x = 1 \pm \mathrm{i}\sqrt{2 + \sqrt{5}}}$$

其中只有第一對是實數（如果把題目理解為只求實根，答案就是這兩個）。



圖像關於 $x = 1$ 對稱（它只取決於 $(x-1)^2$），在 $x = 1$ 處取得最小值 $2^2 - 5 = -1$，所以它與橫軸恰好相交兩次。

驗算

- 數值上，$1 \pm \sqrt{\sqrt{5} - 2} \approx 1.4859$ 和 0.5141；把其中任何一個代入 $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 4$，結果與零相差不超過 10^{-14}，代入 $1 \pm 2.0582\,\mathrm{i}$ 亦然。
- 根之和：四個根加起來是 $4 = -a$，正如所料。
- 試試自己構造一個複合式，例如 $\mathrm{f}(x) = x^2 + x$, $\mathrm{g}(x) = x^2 + 2x$：會得到 $x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x$，而 $a^3 - 4ab + 8c = 64 - 80 + 16 = 0$。

常見錯誤

- 對 d 加上條件：常數項總可以用 q（或 k）來配合，所以 d 是自由的。
- 只證明了「當且僅當」的其中一個方向；只要留意到 $(x^2+vx+w)^2-k$ 本身就是 $\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$ 的形式，一行就能得出逆命題。
- 求出實根後就停筆，沒有留意另一個因式會給出一對複數根。

STEP 之外

條件 $a^3-4ab+8c=0$ 有一個簡潔的意義：代入 $x=y-\frac{1}{4}a$ 可消去三次項，而這個條件正好表示所得的降次（depressed）四次式沒有 y 項，因此它是 y^2 的二次式。這正是費拉里（Ferrari）四次方程一般解法的起點；更廣泛地說，它也是「多項式何時能分解為複合式」這個問題的起點，由此可通往伽羅瓦理論（Galois theory）。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）很適合用來了解哪些多項式方程可用根式求解（solved by radicals）背後的代數。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。