詳細解答

STEP III 2005，第 2 題

純數學 • 可分離變量微分方程

> **STEP III 2005，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q2

關鍵思路

這條微分方程（differential equation）是可分離變數（separable）的，積分後得到的對數可以合併成題目所述的形式。至於距離的問題，應求距離的平方 $D = x^2 + y^2$ 的最小值，這樣便可避開平方根。在曲線上，y^2 是 x 的顯函數，故 D 變成只含 x 的函數，而其導數可以俐落地因式分解。會出現哪些駐點（stationary point），取決於 c 與 a^2 的大小關係。

解答

通解

分離變數（設 $y \neq 0$），

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -\int \frac{x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = -\tfrac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + k,$$

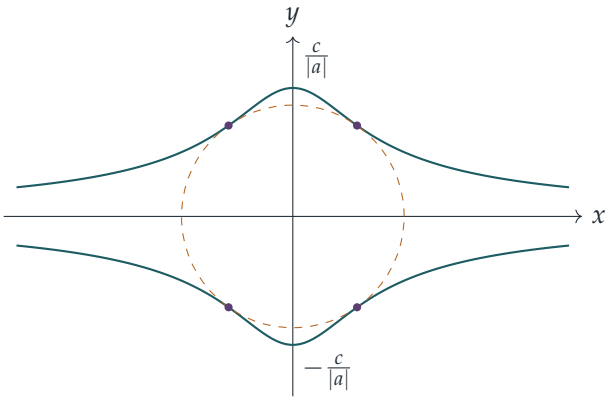
其中 k 為常數。注意 $x^2 + a^2 > 0$ 對任何 x 均成立，因為 $a \neq 0$，所以右邊的對數處處有定義。兩邊乘以二再取指數，

$$y^2 = \frac{\mathrm{e}^{2k}}{x^2+a^2}, \qquad \text{故} \qquad y^2(x^2+a^2) = c^2,$$

其中 $c^2 = \mathrm{e}^{2k}$。解 $y = 0$ 在我們除以 y 時遺失了，它正是 $c = 0$ 的情況，所以 c 確實是任意常數。明確地寫出來，通解（general solution）是 $y = c/\sqrt{x^2+a^2}$，其中 c 可正可負。由於曲線的方程中只出現 c^2，以下我們取 $c > 0$。

繪畫曲線

曲線 $y^2(x^2+a^2)=c^2$ 由 $y=\pm c/\sqrt{x^2+a^2}$ 兩支組成。它對兩條坐標軸都對稱（方程中只出現 x^2 和 y^2），而且永不與 x 軸相交。在上面的一支，y 在 x^2+a^2 最小時最大，於是在 $x=0$ 處取得極大值 $c/|a|$。當 $|x|\to\infty$ 時，我們有 $y\approx\pm c/|x|\to 0$，所以 x 軸是漸近線（asymptote）。下圖所示為 $a=1$、$c=2$ 的情況，並畫出了我們將在第 (ii) 部分求得的圓。



x^2+y^2 的導數

設 $D=x^2+y^2$。先利用微分方程，再代入 $y^2=c^2/(x^2+a^2)$，

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}x}=2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x-\frac{2xy^2}{x^2+a^2}=2x\left(1-\frac{c^2}{(x^2+a^2)^2}\right).$$

此式在兩支上都成立，因為它只涉及 y^2。用積法則（product rule）再求導一次，並利用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+a^2)^{-2}=-4x(x^2+a^2)^{-3}$，

$$\frac{\mathrm{d}^2D}{\mathrm{d}x^2}=2\left(1-\frac{c^2}{(x^2+a^2)^2}\right)+2x\cdot\frac{4c^2x}{(x^2+a^2)^3}=2\left(1-\frac{c^2}{(x^2+a^2)^2}\right)+\frac{8c^2x^2}{(x^2+a^2)^3},$$

即為所求。

D 的駐點出現在 $x=0$ 或 $(x^2+a^2)^2=c^2$ 之處。由於 $x^2+a^2>0$ 及 $c>0$，第二個條件即 $x^2+a^2=c$，亦即 $x^2=c-a^2$。

第 (i) 部分

設 $0<c<a^2$。對任何 x，我們有 $x^2+a^2\geq a^2>c$，所以 $(x^2+a^2)^2>c^2$，而 $\mathrm{d}D/\mathrm{d}x$ 中的括號嚴格為正。因此 $\mathrm{d}D/\mathrm{d}x$ 的正負號與 x 相同：D 在 $x<0$ 時遞減，在 $x>0$ 時遞增。所以 D 在 $x=0$ 處取得全局最小值（global minimum），而且別無他處。（與此吻合的是，該處的二階導數為 $2(1-c^2/a^4)>0$。）

在 $x = 0$ 處，$y^2 = c^2/a^2$，所以最接近原點的點是

$$\left(0,\ \pm\frac{c}{a}\right),$$

與原點的距離為 $c/|a|$。這就是所要求的結果。

第 (ii) 部分

現在設 $c > a^2$。這時有三個駐點：$x = 0$ 和 $x = \pm\sqrt{c - a^2}$。

> **想一想** $x = 0$ 仍然是最近的點嗎？

不是。在 $x = 0$ 處，二階導數為 $2(1 - c^2/a^4)$，它是負數，因為由 $c > a^2 > 0$ 可得 $c^2 > a^4$。所以 $x = 0$ 現在是 D 的局部極大值（local maximum）。在 $x^2 = c - a^2$ 處，我們有 $x^2 + a^2 = c$，所以括號等於零，而

$$\frac{\mathrm{d}^2 D}{\mathrm{d}x^2} = \frac{8c^2(c - a^2)}{c^3} = \frac{8(c - a^2)}{c} > 0,$$

得到局部極小值（local minimum）。要知道它們是全局最小值，可以考察 $\mathrm{d}D/\mathrm{d}x$ 的正負號。當 $x > 0$ 時，括號在 $x^2 < c - a^2$ 時為負，在 $x^2 > c - a^2$ 時為正，所以在 $x \geq 0$ 上，函數 D 一直遞減至 $x = \sqrt{c - a^2}$，其後遞增。因此 D 在 $x \geq 0$ 上的最小值出現在 $x = \sqrt{c - a^2}$，而根據對稱性，它在 $x \leq 0$ 上的最小值出現在 $x = -\sqrt{c - a^2}$。

在這些點上，$y^2 = c^2/(x^2 + a^2) = c^2/c = c$。所以曲線上最接近原點的點是以下四點

$$\left(\pm\sqrt{c - a^2},\ \pm\sqrt{c}\right)$$

（正負號的全部四種組合），與原點的距離為 $\sqrt{2c - a^2}$。

作為覆核，在 $x = 0$ 處距離的平方是 c^2/a^2，而

$$\frac{c^2}{a^2} - (2c - a^2) = \frac{(c - a^2)^2}{a^2} > 0,$$

所以 y 軸上的點確實較遠。

驗算

- 把 $y = c/\sqrt{x^2 + a^2}$ 代回微分方程，結果成立：$y' = -cx(x^2 + a^2)^{-3/2} = -xy/(x^2 + a^2)$。
- 取 $a = 1$、$c = 2$，以窮舉方式搜尋 $x^2 + 4/(x^2 + 1)$ 的值，可找到最小值 $3 = 2c - a^2$，出現在 $x = \pm 1 = \pm\sqrt{c - a^2}$，而 $y^2 = 2 = c$。這就是圖中的四個圓點，即半徑為 $\sqrt{3}$ 的虛線圓與曲線相切之處。
- 當 $c = a^2$ 時，兩個答案一致：$\sqrt{c - a^2} = 0$ 且 $\sqrt{c} = c/|a| = |a|$，所以四個點合併成 $(0, \pm|a|)$。

常見錯誤

- 由「$\mathrm{d}D/\mathrm{d}x = 0$ 且 $\mathrm{d}^2D/\mathrm{d}x^2 > 0$」便斷定某點的距離最短。這只能說明它是局部極小值；全局的問題要靠 $\mathrm{d}D/\mathrm{d}x$ 的正負號來解決。
- 忘記了下面的一支，以致在第 (ii) 部分只給出兩個點而不是四個。
- 寫成 $x^2 + a^2 = \pm c$：負號的情況不可能發生，因為 $x^2 + a^2 > 0$。

STEP 之外

在 $y^2(x^2 + a^2) = c^2$ 的條件下求 $x^2 + y^2$ 的最小值，是一個約束優化（constrained optimisation）問題。在大學裏，你會學到拉格朗日乘數（Lagrange multipliers），它毋須先解出其中一個變數便能處理這類問題：在最近的點上，曲線的法線（normal）沿半徑方向，這正是虛線圓與曲線相切的原因。當 c 越過 a^2 時，原本在 $x = 0$ 的單一最小值一分為二，這是叉式分岔（pitchfork bifurcation）的一個簡單例子。想進一步了解可分離變數方程及其解曲線，可參閱 Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程入門教科書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。