詳細解答

STEP III 2005，第 13 題

概率與統計 • 幾何分佈

> **STEP III 2005，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q13

關鍵思路

由 $w+1$ 至 n 的牌完全不起作用：它們既不派錢，也不會令遊戲結束。因此在第 (i) 部分，我們大可不理會它們，只看抽出 $0, 1, \ldots, w$ 的那些抽牌；每一次這樣的抽牌，都是從 $w+1$ 個等可能的數字中公平地抽出一個，於是總獎金就是一個幾何隨機變量（geometric random variable）。在第 (ii) 部分，各次抽牌不再獨立（independent），我們把總獎金拆成若干個指示變量（indicator）之和，每張有獎金的牌對應一個，然後利用期望值的線性性質（linearity of expectation）。

解答

若某次抽牌抽出 $0, 1, \ldots, w$ 其中之一，稱它為有關的抽牌；若抽出 $w+1, \ldots, n$ 其中之一，則稱它為無關的抽牌。

第 (i) 部分

為何兩個事件的概率相同。無關的抽牌不會改變任何事情：玩家甚麼也得不到，遊戲繼續進行。因此玩家的總獎金只取決於有關抽牌的序列：每次非零的有關抽牌可得 £1，而第一次抽出 0 的有關抽牌令遊戲結束。所以，玩家恰好贏得 £3，當且僅當在有關的抽牌之中，首三次抽出非零的數字，而第四次抽出 0。這兩者是同一個事件，故概率相同。

（每次抽牌都獨立地以概率 $\frac{w+1}{n+1} > 0$ 為有關的抽牌，所以有關的抽牌以概率 1 有無限多次，當中自然有第一、第二、第三和第四次；遊戲以概率 1 結束。）

想一想 為甚麼不論之前發生過甚麼，每次有關的抽牌抽出 $0,1,\ldots,w$ 中任何一個數的可能性都相同？

由於每次抽出的牌都會放回，各次抽牌互相獨立，而且每次都在 $\{0,1,\ldots,n\}$ 上均勻分佈（uniform）。已知某一次抽牌是有關的抽牌，它就在 $\{0,1,\ldots,w\}$ 上均勻分佈，因為這 $w+1$ 個結果本來就是等可能的。各次抽牌互相獨立，意味着先後各次有關抽牌的數值也互相獨立。所以每次有關的抽牌以概率 $\frac{1}{w+1}$ 抽出 0，以概率 $\frac{w}{w+1}$ 抽出非零的數，並且與其他各次獨立。

因此

$$P(\text{恰好贏得£3}) = \left(\frac{w}{w+1}\right)^3 \cdot \frac{1}{w+1} = \frac{w^3}{(w+1)^4},$$

正如所求。

一般的 r。把 3 換成 r，用完全相同的論證（首 r 次有關的抽牌非零，第 $(r+1)$ 次為零），可得

$$P(\text{恰好贏得£}r) = \frac{w^r}{(w+1)^{r+1}}, \qquad r = 0,1,2,\ldots$$

設 $q = \frac{w}{w+1}$，上式就是 $(1-q)q^r$，即幾何分佈（geometric distribution）；這些概率之和為 1，理應如此。

總獎金的期望值。設 X 為以英鎊計的總獎金。當 $|q|<1$ 時，對 $\sum_{r\ge 0} q^r = \frac{1}{1-q}$ 求導，再乘以 q，得 $\sum_{r\ge 0} rq^r = \frac{q}{(1-q)^2}$。所以

$$E(X) = \sum_{r=0}^{\infty} r(1-q)q^r = (1-q)\cdot\frac{q}{(1-q)^2} = \frac{q}{1-q} = \frac{w/(w+1)}{1/(w+1)} = w.$$

總獎金的期望值是 £w。

第 (ii) 部分

現在抽出的牌不再放回，所以這個遊戲等同於把整疊牌洗成一個均勻隨機的次序，然後逐張翻開，直至 0 出現為止。在這個次序中，牌 $1,\ldots,w$ 之中每有一張排在牌 0 之前，玩家就得到 £1（排在 0 之前的每張牌都會被抽出，排在它之後的則一張也不會）。

對 $k = 1,\ldots,w$，若牌 k 排在牌 0 之前，設 $I_k = 1$，否則設 $I_k = 0$。總獎金為 $Y = I_1 + I_2 + \cdots + I_w$。

想一想 各個 I_k 並不獨立。這有沒有影響？

沒有：不論各變量之間如何相依，和的期望值總是等於期望值之和。所以我們只需求出 $P(I_k = 1)$。在均勻隨機的次序中，把牌 k 與牌 0 的位置對調，就是「k 在 0 之前」的次序與「0 在 k 之前」的次序之間的一個雙射（bijection），所以兩者等可能，$P(I_k = 1) = \frac{1}{2}$。

因此

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{w} E(I_k) = \sum_{k=1}^{w} \tfrac{1}{2} = \frac{w}{2},$$

正是第 (i) 部分獎金期望值 w 的一半，正如所求。

驗算

- 取 $w = n$（每張非零的牌都有獎金）而且不放回，牌 0 的位置在 $1, \ldots, n+1$ 上均勻分佈，所以排在它之前的牌數的平均值是 $\frac{n}{2}$，與 $\frac{w}{2}$ 吻合。
- 放回而 $w = 1$ 時，每次有關的抽牌相當於在 0 與 1 之間擲一枚公平硬幣，所以 $P(X = r) = 2^{-(r+1)}$ 而 $E(X) = 1$，與 $w^r/(w+1)^{r+1}$ 及 $E(X) = w$ 吻合。
- 取 $n = 5$、$w = 2$，模擬 2×10^5 局遊戲，得 $P(X = 3) \approx 0.0995$，對比 $\frac{8}{81} \approx 0.0988$；平均獎金為 1.995，對比 2。對細小的牌疊（例如 $n = 5$、$w = 3$）窮舉所有次序，得出不放回時的平均值為 $\frac{3}{2} = \frac{w}{2}$。

常見錯誤

- 以 $\frac{1}{n+1}$ 作為某次抽牌抽出 0 的機會。這是每次抽牌的機會，但其間可以出現任意多次無關的抽牌；以有關的抽牌為條件，才得出簡潔的 $\frac{1}{w+1}$。
- 遺漏 $r = 0$：第一次有關的抽牌可能就是 0，所以有 $\frac{1}{w+1}$ 的概率一無所獲。
- 在第 (ii) 部分試圖求出獎金的完整分佈。這並無必要；用指示變量和線性性質，兩行就可完成。

STEP 之外

不理會無關的抽牌，是*稀疏化*（thinning）的一個例子，即只在有趣的事情發生的時刻觀察一個過程；這個想法會在馬可夫鏈（Markov chain）（所謂「跳躍鏈」（jump chain））和泊松過程（Poisson process）中再次出現。把一個計數寫成指示變量之和，再利用期望值的線性性質（即使各指示變量並不獨立），是大學一年級概率論與組合數學中最有用的技巧之一。這兩個想法在 Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率論入門教材）以及 Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論導論）中都有詳細闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。