詳細解答

STEP III 2005，第 12 題

概率與統計 • 無偏估計量的組合

STEP III 2005，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/05-s3-q12

關鍵思路

整道題都建基於獨立（independent）隨機變量（random variable）的線性組合（linear combination）的兩個事實：期望值（expectation）可以相加，而方差（variance）則要乘上係數的平方後相加。要求某個期望值無論真實的單圈時間是多少都符合要求，就等於要比較係數，於是每個條件都化成一條關於常數的方程。這樣，X 就是比賽時間的一個合理估計，而 Y 則利用兩種計時方法之間的差異來估計未知的 σ。

解答

設真實的單圈時間為 $\mu_1, \ldots, \mu_4$，真實的比賽時間為 $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4$。記

$$S = T_1 + T_2 + T_3 + T_4.$$

那麼 $\mathrm{E}(S) = \mu_1 + \cdots + \mu_4 = \mu$，而且由於 $T_1, \ldots, T_4$ 互相獨立（各計時員互相獨立），$\mathrm{Var}(S) = 4\sigma^2$。另外 $\mathrm{E}(T) = \mu$，$\mathrm{Var}(T) = \sigma^2$，而 T 與 S 獨立，因為 S 只取決於另外四位計時員。

求 X

對於 $X = aT + bS$，

$$\mathrm{E}(X) = a\mu + b\mu = (a+b)\mu.$$

無論真實的單圈時間是多少，這個值都必須等於 μ，特別是對某個 $\mu \neq 0$ 也要成立；因此

$$a + b = 1.$$

由 T 與 S 的獨立性，

$$\operatorname{Var}(X) = a^2 \operatorname{Var}(T) + b^2 \operatorname{Var}(S) = \sigma^2(a^2 + 4b^2) = \sigma^2(a^2 + 4(1-a)^2).$$

二次式 $a^2 + 4(1-a)^2 = 5a^2 - 8a + 4$ 的首項係數為正，所以它在導數 $10a - 8$ 等於零之處取得最小值，即 $a = \frac{4}{5}$。（用配方法（completing the square）：$5a^2 - 8a + 4 = 5(a - \frac{4}{5})^2 + \frac{4}{5}$。）因此 $a = \frac{4}{5}$，$b = \frac{1}{5}$，而

$$X = \tfrac{4}{5}T + \tfrac{1}{5}(T_1 + T_2 + T_3 + T_4), \qquad \operatorname{Var}(X) = \tfrac{4}{5}\sigma^2.$$

這個結果合情合理：T 的可靠程度是 S 的四倍（方差是 σ^2 對 $4\sigma^2$），所以它得到四倍的權重。

求 Y

對於 $Y = cT + dS$，我們利用 $\mathrm{E}(Y^2) = \operatorname{Var}(Y) + (\mathrm{E}(Y))^2$：

$$\mathrm{E}(Y^2) = \sigma^2(c^2 + 4d^2) + (c+d)^2\mu^2.$$

想一想 無論真實的單圈時間是多少，這個式子怎樣才能都等於 σ^2？

常數 c、d 不可以依賴 μ，但 μ 可以是任何正數。這個式子是 $\sigma^2(c^2 + 4d^2)$ 加上 μ^2 的某個倍數，所以要它在 μ 變動時仍然等於 σ^2，μ^2 的係數就必須為零：$(c+d)^2 = 0$，所以 $d = -c$。接着我們需要 $\sigma^2(c^2 + 4c^2) = \sigma^2$，即 $c^2 = \frac{1}{5}$。取 $c = 1/\sqrt{5}$，

$$Y = \frac{T - (T_1 + T_2 + T_3 + T_4)}{\sqrt{5}}$$

（取另一個符號會得到 $-Y$，同樣可行，因為要緊的只是 Y^2）。所以 Y 量度的是兩種計時結果之間的差異；它的期望值是 0，而它的平方是 σ^2 的無偏估計（unbiased estimate）。

這一場比賽

當 $T = 220$ 及 $S = 220.5$ 時，

$$X = \tfrac{4}{5}(220) + \tfrac{1}{5}(220.5) = 176 + 44.1 = 220.1,$$
$$Y = \frac{220 - 220.5}{\sqrt{5}} = -\frac{0.5}{\sqrt{5}}, \qquad Y^2 = \frac{0.25}{5} = 0.05.$$

所以我們估計 $\sigma^2 \approx 0.05$，因而

$\operatorname{Var}(X) = \frac{4}{5}\sigma^2 \approx \frac{4}{5}(0.05) = 0.04$，　　就標準差（standard deviation）而言，$X \approx 0.2$ 秒.

因此我們對真實比賽時間的估計是 220.1 ± 0.2 秒：真實時間大致落在區間

$$[219.9,\ 220.3] \text{ 秒},$$

之內，這裏在兩邊各取一個標準差。如果想要更大的把握，可以在兩邊各取兩個標準差，得到 [219.7, 220.5] 秒；若誤差服從正態分佈（normal distribution），這大約是一個 95% 的區間。要留意 σ^2 只是由 Y^2 的單一個值估計出來的，所以區間的寬度本身也只是一個粗略的估計。

驗算

- 當 $a = \frac{4}{5}$ 時，$\mathrm{Var}(X) = \frac{4}{5}\sigma^2$ 比 $\mathrm{Var}(T) = \sigma^2$ 和 $\mathrm{Var}(S) = 4\sigma^2$ 都要小，這正是結合兩個獨立量度所應有的效果。
- $X = 220.1$ 介乎兩個量度值之間，而且遠較接近 $T = 220$，即較可靠的那一個。
- 以 200 000 場比賽（$\sigma = 0.7$）進行模擬，所得 X 的平均值與真實時間相差不超過 0.001，$\mathrm{Var}(X) \approx 0.393$，對比 $\frac{4}{5}(0.49) = 0.392$；而 Y^2 的平均值為 0.491，對比 $\sigma^2 = 0.49$。

常見錯誤

- 把方差取作 $\mathrm{Var}(S) = \sigma^2$ 或 $16\sigma^2$：正確的是 $4\sigma^2$，即四個獨立方差之和。
- 忘記了 $\mathrm{E}(Y^2)$ 中的 $(\mathrm{E}\,Y)^2$ 一項，而正是這一項迫使 $d = -c$。
- 把 $Y^2 = 0.05$ 當作 X 的方差，而沒有乘上 $\frac{4}{5}$。

STEP 之外

X 是兩個估計的最小方差無偏線性組合：一般的法則是以每個獨立估計的方差的倒數作為其權重，這是薈萃分析（meta-analysis）中逆方差加權（inverse-variance weighting）的基礎，也是最小二乘法（least squares）的高斯–馬可夫定理（Gauss–Markov theorem）的基礎。Y^2 是 σ^2 的無偏估計量（estimator），就像以 $n - 1$ 作除數的樣本方差（sample variance）一樣。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）仔細講解了和的期望值與方差，而大學的第一門統計課程則會正式探討估計量與置信區間（confidence interval）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。