詳細解答

STEP III 2005，第 11 題

力學 • 剛體平衡

> **STEP III 2005，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q11

關鍵思路

轉軸與各桿組成一個繞固定水平軸轉動的剛體（rigid body），所以只需一個角 θ 便能描述整個系統，而能量自然是最合適的工具。勢能（potential energy）是三個餘弦之和，它們的角度相差 $\frac{2}{3}\pi$；把它們合併，便得到單一的表達式 $A\cos\theta + B\sin\theta$，這其實是一個喬裝了的餘弦波。一旦寫成這個形式，平衡位置、它們的穩定性，以及越過最高點所需的能量，全都可以直接讀出。

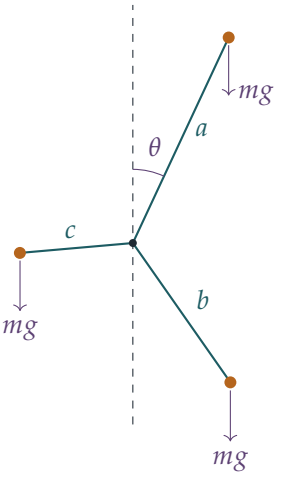
解答

能量

我們把各粒子視為輕質剛桿上的質點，並假設軸承光滑，因此沒有能量損失。如圖所示，所有角度均由向上的鉛垂線起按順時針方向量度。於是長度為 a、b、c 的桿與向上的鉛垂線所成的角分別是 θ、$\theta + \frac{2}{3}\pi$ 和 $\theta + \frac{4}{3}\pi$，所以各粒子在轉軸之上的高度為

$$a\cos\theta, \qquad b\cos\left(\theta + \tfrac{2}{3}\pi\right), \qquad c\cos\left(\theta + \tfrac{4}{3}\pi\right)$$

。



利用 $\cos\frac{2}{3}\pi = \cos\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}$、$\sin\frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 和 $\sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$，可得

$$\cos\left(\theta + \tfrac{2}{3}\pi\right) = -\tfrac{1}{2}\cos\theta - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta, \qquad \cos\left(\theta + \tfrac{4}{3}\pi\right) = -\tfrac{1}{2}\cos\theta + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta.$$

取轉軸為勢能的零點，

$$\begin{aligned} V &= mg\left[a\cos\theta + b\cos\left(\theta + \tfrac{2}{3}\pi\right) + c\cos\left(\theta + \tfrac{4}{3}\pi\right)\right] \\ &= mg\left[\tfrac{1}{2}(2a - b - c)\cos\theta - \tfrac{\sqrt{3}}{2}(b - c)\sin\theta\right]. \end{aligned}$$

每個粒子都以角速度（angular velocity）$\dot\theta$ 繞轉軸作圓周運動，所以它們的速率分別是 $a\dot\theta$、$b\dot\theta$、$c\dot\theta$。各桿為輕桿，因此總能量為

$$E = \tfrac{1}{2}m\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\dot\theta^2 + \tfrac{1}{2}mg\left[(2a - b - c)\cos\theta - \sqrt{3}\,(b - c)\sin\theta\right].$$

平衡

系統在 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}\theta = 0$ 之處處於平衡（equilibrium），即

$$-\tfrac{1}{2}mg\left[(2a - b - c)\sin\theta + \sqrt{3}\,(b - c)\cos\theta\right] = 0.$$

由於 $a > b$ 且 $a > c$，我們有 $2a - b - c > 0$。所以在平衡位置 $\cos\theta \neq 0$：若 $\cos\theta = 0$，則 $\sin\theta = \pm 1$，方括號內的值便是 $\pm(2a - b - c) \neq 0$。兩邊除以 $\cos\theta$，得

$$\tan\theta = -\frac{(b - c)\sqrt{3}}{2a - b - c},$$

這正是所求。這個論證也可以倒過來：任何滿足此方程的 θ 都使 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}\theta = 0$。所以平衡位置恰好就是此方程的解。

恰好兩個平衡位置，以及哪一個穩定

正切函數的週期為 π，並且在每個有定義而長度為 π 的區間上，每個實數值都恰好取一次。所以方程在 $0 \le \theta < 2\pi$ 內恰好有兩個解，兩者相差 π。這就是兩個平衡位置。

要判斷穩定性（stability），可把 V 寫成單一餘弦。設

$$A = \tfrac{1}{2}(2a - b - c), \qquad B = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}(b - c),$$

則 $V = mg(A\cos\theta + B\sin\theta)$。於是

$$\begin{aligned} 4(A^2 + B^2) &= (2a - b - c)^2 + 3(b - c)^2 \\ &= 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4ab - 4bc - 4ca \\ &= 2\left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right] = 4R^2, \end{aligned}$$

所以 $A^2 + B^2 = R^2$，而由於各長度互不相同，$R > 0$。選取 α 使 $\cos\alpha = A/R$ 及 $\sin\alpha = B/R$。由於 $A > 0$ 且 $B < 0$，故 $-\frac{1}{2}\pi < \alpha < 0$。於是

$$V = mgR\cos(\theta - \alpha).$$

兩個平衡位置是 $\theta = \alpha$，該處 $V = mgR$ 為極大值；以及 $\theta = \alpha + \pi$，該處 $V = -mgR$ 為極小值。

> **想一想** 為甚麼 V 取極小值就代表穩定？

這裏 $V''(\theta) = -mgR\cos(\theta - \alpha)$。在 $\theta = \alpha + \pi$ 時，它等於 $mgR > 0$，所以微小的位移會令勢能上升。總能量既然固定，系統便不能走得太遠，只會在這個位置附近振動。在 $\theta = \alpha$ 時，$V'' = -mgR < 0$：微小的位移令 V 下降，動能（kinetic energy）增加，系統便會遠離該位置。所以穩定平衡位置是 $\theta = \alpha + \pi$，即滿足 $\frac{1}{2}\pi < \theta < \pi$ 的那一個，該處 $\cos\theta < 0$ 而 $\sin\theta > 0$。在這個位置，最長的桿 a 指向水平線以下，與向下的鉛垂線成角 $|\alpha|$。另一個平衡位置滿足 $-\frac{1}{2}\pi < \theta < 0$，桿 a 在水平線以上，是不穩定的。

完整轉圈

由於軸承光滑，而重力是保守力（conservative force），所以能量守恆。記 $I = m(a^2 + b^2 + c^2)$，則

$$\tfrac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mgR\cos(\theta - \alpha) = E.$$

要完整地轉圈，系統必須越過每一個角度，尤其要越過 $\theta = \alpha$，該處 V 取其最大值 mgR。由於處處都有 $\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \ge 0$，這就需要 $E \ge mgR$。設 ω 為系統經過穩定位置 $\theta = \alpha + \pi$ 時的角速度，該處 $V = -mgR$。於是 $E = \frac{1}{2}I\omega^2 - mgR$，條件變成

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 - mgR \ge mgR \quad\Longleftrightarrow\quad \omega^2 \ge \frac{4mgR}{I} = \frac{4gR}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

所以系統經過穩定平衡位置時，角速度必須至少為 $\sqrt{4gR/(a^2+b^2+c^2)}$，這正是所求。

（在等號成立的臨界情況下，系統會緩緩趨近不穩定平衡位置，要經過無限長的時間才到達。嚴格來說，要完整轉一圈，ω 必須嚴格大於這個值；題目只要求必要的下界。）

驗算

- 若 $a=b=c$，則 $R=0$ 且 $V\equiv 0$：三個相等的質量在任何位置都平衡（它們的質心在軸上），而且無論轉得多慢都能轉過一圈。這與下界趨向零吻合。
- 若 $b=c$，正切條件給出 $\tan\theta=0$。根據對稱性，長桿指向正上方（不穩定）或正下方（穩定）。
- 以隨機長度作數值檢驗，可確認 V 的形式、恆等式 $A^2+B^2=R^2$，以及恰好有兩個平衡位置，其穩定性亦如上所述。取 $a=3$、$b=2$、$c=0.5$ 及 $g=9.81$，臨界角速度為 $2.5406\ \mathrm{rad\,s^{-1}}$。對運動方程逐步作數值計算可見，比這個值低 2% 時系統會擺回來，而高 2% 時則會轉過一整圈。

常見錯誤

- 把位於 $\theta-\frac{2}{3}\pi$ 和 $\theta+\frac{2}{3}\pi$ 的兩根桿與圖中的位置對調，會令 $\sin\theta$ 項的符號反轉，正切條件中的符號亦隨之反轉。
- 斷言「有兩個解」，卻沒有指出 $\cos\theta=0$ 不可能是平衡位置，因而除以 $\cos\theta$ 不會漏掉任何解。
- 把動能寫成 $\frac{1}{2}m(a+b+c)^2\dot\theta^2$ 或類似的式子。每個粒子各有自己的速率 $r\dot\theta$，所以轉動慣量（moment of inertia）是 $m(a^2+b^2+c^2)$。

STEP 之外

這個系統是一個複擺（compound pendulum），即繞固定軸轉動的剛體。它的能量只取決於轉動慣量和質心（centre of mass）的位置，而這裏質心與軸的距離為 $R/3$。把 $\frac{1}{2}I\dot\theta^2+V(\theta)=E$ 看成 $(\theta,\dot\theta)$ 相平面（phase plane）上的一條曲線，振動在分界線（separatrix）之內，轉動在分界線之外，這個圖像是大學一年級動力學的核心概念。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）涵蓋了剛體轉動，以及處理這類問題的能量方法。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。