詳細解答

STEP III 2005，第 10 題

力學 • 彈性帶與摩擦力

> **STEP III 2005，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q10

關鍵思路

一切都取決於一個變量：兩圓盤圓心之間的距離 d。橡皮圈的長度由 d 決定，因此它的張力（tension）和所儲存的能量都是 d 的簡單函數。由此出發，能量的考慮（彈性勢能（elastic energy）對比克服摩擦力（friction）所作的功）告訴我們圓盤在哪裏停下，而比較橡皮圈的拉力與極限摩擦力（limiting friction），則告訴我們圓盤停下後會否保持靜止。

解答

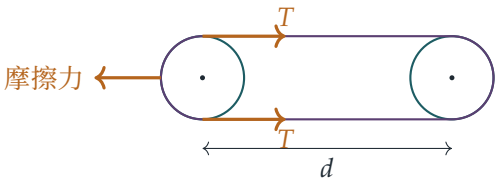
我們把兩個圓盤視為完全相同，橡皮圈視為輕而有彈性，且與圓盤的接觸是光滑（smooth）的，並假設圓盤一旦滑動，摩擦力的大小就是 μmg。由對稱性，兩個圓盤總是沿相反方向移動相等的距離，所以橡皮圈的兩段直線部分始終保持平行。

把橡皮圈表示為 d 的函數。 當兩圓心相距 d 時，橡皮圈繞過每個圓盤半周，再沿着兩段長度為 d 的直線部分伸展。所以它的長度是 $2\pi r + 2d$，伸長量（extension）是 $x = 2d$。根據虎克定律（Hooke's law），取彈性模量（modulus of elasticity）$\lambda = \frac{\pi mg}{12}$ 及自然長度（natural length）$2\pi r$，

$$T = \frac{\lambda x}{2\pi r} = \frac{\pi mg}{12} \cdot \frac{2d}{2\pi r} = \frac{mg\,d}{12r}, \qquad E = \frac{\lambda x^2}{2 \cdot 2\pi r} = \frac{mg\,d^2}{12r}.$$

由於接觸是光滑的，整條橡皮圈上的張力處處相同。每個圓盤都受兩段直線部分拉扯，兩者都平行於圓心連線，並指向另一個圓盤。所以每個圓盤所受的合拉力是

$$P = 2T = \frac{mg\,d}{6r}.$$



上圖為俯視圖，顯示左邊圓盤向另一個圓盤滑動時所受的水平力。它的重量與法向反作用力（normal reaction）都是鉛垂的，並且互相抵消。

釋放時 $d = 6r$，所以 $E_0 = 3mgr$ 而 $P = mg$。接觸時 $d = 2r$，所以 $E = \frac{1}{3}mgr$。

圓盤互相靠近時的能量。 當圓盤從 $d = 6r$ 向內移動時，每個圓盤都要克服摩擦力 μmg 移動 $\frac{1}{2}(6r - d)$ 的距離。所以克服摩擦力所作的總功是 $\mu mg(6r - d)$。因此總動能(kinetic energy）為

$$\begin{aligned} K(d) &= 3mgr - \frac{mg\,d^2}{12r} - \mu mg(6r - d) \\ &= mg\,(6r - d)\left(\frac{6r + d}{12r} - \mu\right), \end{aligned}$$

其中用到 $3r - \frac{d^2}{12r} = \frac{(6r-d)(6r+d)}{12r}$。

第 (i) 部分

起動。釋放時每個圓盤所受的拉力是 $P = mg$，而摩擦力最多只能提供 μmg。所以圓盤開始滑動，當且僅當 $mg > \mu mg$，即 $\mu < 1$。

停下。假設 $\mu < 1$。對於 $d < 6r$，$K(d)$ 只會在 $\frac{6r+d}{12r} = \mu$ 之處為零，即在

$$d^* = 12\mu r - 6r.$$

當 d 由 $6r$ 開始減少時，第二個因子 $\frac{6r+d}{12r} - \mu$ 由 $1 - \mu > 0$ 開始遞減，所以在 d 到達 d^* 之前 $K > 0$。圓盤在相撞之前停下，當且僅當在接觸之前已到達 d^*，即 $2r < d^* < 6r$：

$$8r < 12\mu r < 12r \iff \tfrac{2}{3} < \mu < 1.$$

若 $\mu \le \frac{2}{3}$，則 $K(2r) \ge 0$，圓盤會先碰上對方。（當 $\mu = \frac{2}{3}$ 時，它們剛好以零速率互相接觸，這不算是「之前」。）

> ? **想一想** 圓盤在 d^* 停下之後，橡皮圈會否令它們再次移動？

在 d^* 處，拉力是 $P = \frac{mg\,d^*}{6r} = (2\mu - 1)mg$。由於 $\mu < 1$，這小於極限摩擦力 μmg，所以靜摩擦力（static friction）能把圓盤固定，它們保持靜止。結合兩個條件，圓盤開始滑動但在相撞之前停下，當且僅當 $\frac{2}{3} < \mu < 1$。 ■

第 (ii) 部分

若圓盤至少相撞一次，它們首次到達 $d = 2r$ 時必定是向內移動，而靠近階段的公式仍然有效。所以緊接首次碰撞之前的總動能是

$$K(2r) = mg\,(4r)\left(\frac{8r}{12r} - \mu\right) = 4mgr\left(\tfrac{2}{3} - \mu\right) = \tfrac{4}{3}mgr(2 - 3\mu),$$

正如所求。（此值為正，恰好當 $\mu < \frac{2}{3}$，與第 (i) 部分一致。）

第 (iii) 部分

首先，由 $\mu^2 < \frac{4}{9}$ 得 $\mu < \frac{2}{3}$，所以根據第 (i) 和第 (ii) 部分，圓盤確實會相撞。碰撞中損失一半動能，所以它們從 $d = 2r$ 反彈時的總動能是

$$K_1 = \tfrac{2}{3}mgr(2 - 3\mu).$$

現在圓盤互相遠離。橡皮圈的拉力和摩擦力都指向另一個圓盤，所以每個圓盤都在減速。當間距由 $2r$ 增至 d 時，彈性勢能增加了 $\frac{mg(d^2-4r^2)}{12r}$，而克服摩擦力所作的功是 $\mu mg(d - 2r)$，所以

$$K(d) = K_1 - \frac{mg(d^2 - 4r^2)}{12r} - \mu mg(d - 2r).$$

這是 d 的嚴格遞減函數，所以它恰好有一個零點，就是圓盤停下時的間距 d_1。設 $d_1 = 2r + u$，並乘以 $\frac{12r}{mg}$：

$$u^2 + 4r(1 + 3\mu)\,u - 8r^2(2 - 3\mu) = 0.$$

取正根，並化簡判別式（discriminant），$(1 + 3\mu)^2 + 2(2 - 3\mu) = 9\mu^2 + 5$，得

$$u = 2r\left(\sqrt{9\mu^2 + 5} - (1 + 3\mu)\right), \qquad d_1 = 2r\left(\sqrt{9\mu^2 + 5} - 3\mu\right).$$

（可以驗證 $2r < d_1 \le 6r$，所以橡皮圈保持繃緊，其能量公式仍然適用。）

? **想一想** 圓盤在 d_1 處瞬間靜止。甚麼因素決定它們會否留在那裏？

若橡皮圈的拉力不超過極限摩擦力，它們便保持靜止：

$$\frac{mg\,d_1}{6r} \le \mu mg \iff \sqrt{9\mu^2 + 5} - 3\mu \le 3\mu \iff 9\mu^2 + 5 \le 36\mu^2 \iff \mu^2 \ge \tfrac{5}{27},$$

其中兩邊皆為正數，所以可以取平方。因此若 $\frac{5}{27} < \mu^2 < \frac{4}{9}$，圓盤會相撞、反彈、單調地減速至在 d_1 處靜止，然後被靜摩擦力永久固定在那裏。它們在首次碰撞之後恰好停下一次。 ■

驗算

- 當 $\mu = \frac{2}{3}$ 時，第 (i) 部分的停止點 $d^* = 12\mu r - 6r$ 和第 (ii) 部分的動能都給出「以零速率到達 $d = 2r$」，所以兩部分在邊界上吻合。
- 取 $\mu = 0.5$（在第 (iii) 部分的範圍之內）：$K(2r) = \frac{2}{3}mgr$，$K_1 = \frac{1}{3}mgr$，而 $d_1 = 2r(\sqrt{7.25} - 1.5) \approx 2.385r$。該處的拉力 $\approx 0.397mg < 0.5mg$，所以圓盤留在原處。以逐步數值模擬這個運動，重現了以上所有結果，亦重現了多個 $\mu \in (\frac{2}{3}, 1)$ 所對應的停止點 $d^* = 12\mu r - 6r$。對於 $\mu^2 < \frac{5}{27}$（例如 $\mu = 0.42$），模擬顯示圓盤停下後再次移動，與預測相符。

常見錯誤

- 把伸長量當作 d 而不是 $2d$：兩段直線部分都被拉長。
- 每個圓盤只計算一個張力：橡皮圈以兩股拉着每個圓盤，合共 $2T$。
- 忘記檢查圓盤停下後是否保持靜止。「速率為零」與「永久靜止」是兩個不同的條件。

STEP 之外

摩擦力令這成為一個分段系統。每當速度改變正負號，運動方程就會改變；而當外加的力低於摩擦力的臨界值時，便會出現「卡住」的狀態。這類系統（黏滑運動，stick–slip motion）在大學一年級的動力學課程中會以相平面（phase-plane）方法研究。當 μ 很小時，帶有能量損失的反覆碰撞會在有限時間內產生無限多次反彈，這值得細想。關於能量方法和摩擦力的更多內容，可參閱 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。