詳細解答

STEP III 2005，第 1 題

純數學 • 三角方程與圖像

> **STEP III 2005，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q1

關鍵思路

凡是形如 sin(某式) = cos(另一式) 的方程，都可以利用 $\cos B = \sin(\frac{\pi}{2} - B)$ 轉化為關於兩個自變量（argument）的命題。把這個做法用於 $\sin(\sin x) = \cos(\cos x)$，便得出 $\sin x \mp \cos x$ 必須等於 $\frac{\pi}{2}$ 的奇數倍，而 $|\sin x \pm \cos x|$ 的上界表明它根本太小，無法達到這樣的值。至於草圖，只要想清楚當內層自變量只在一個很短的區間內變動時，外層函數會對它產生甚麼作用，便可畫出。

解答

方程 $\sin A = \cos B$

由於 $\cos B = \sin(\frac{\pi}{2} - B)$，我們需要求 $\sin A = \sin C$ 的通解（general solution），其中 $C = \frac{\pi}{2} - B$。正弦函數在每個長度為 2π 的週期（period）內，對 $[-1, 1]$ 中的每個值都恰好取到兩次，分別在 C 和 $\pi - C$ （當該值為 ± 1 時，兩者重合），所以

$$\sin A = \sin C \iff A = C + 2k\pi \text{ 或 } A = \pi - C + 2k\pi \quad \text{對某個整數} k.$$

代入 $C = \frac{\pi}{2} - B$：

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{\pi}{2} - B + 2k\pi = (4k+1)\tfrac{\pi}{2} - B, \\ \text{或} \quad A &= \pi - \tfrac{\pi}{2} + B + 2k\pi = (4k+1)\tfrac{\pi}{2} + B. \end{aligned}$$

因此 $\sin A = \cos B$ 當且僅當存在整數 n 使得 $A = (4n+1)\frac{\pi}{2} \pm B$。兩個方向都已涵蓋，因為上面每一步都是「當且僅當」（if and only if）。（若要直接驗證「若」的方向：$\sin((4n+1)\frac{\pi}{2} \pm B) = \sin(\frac{\pi}{2} \pm B) = \cos B$，這裏用到週期為 2π。）

上界與方程 $\sin(\sin x) = \cos(\cos x)$

利用複角公式（compound angle formula），

$$\sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\left(\sin x \cos \tfrac{\pi}{4} \pm \cos x \sin \tfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin(x \pm \tfrac{\pi}{4}),$$

又因為對任何 θ 都有 $|\sin\theta| \le 1$，所以對所有 x 都有 $|\sin x \pm \cos x| \le \sqrt{2}$，這正是所要證明的。

現在假設對某個 x 有 $\sin(\sin x) = \cos(\cos x)$。在第一個結果中取 $A = \sin x$ 和 $B = \cos x$，可知存在整數 n 使得

$$\sin x = (4n+1)\tfrac{\pi}{2} \pm \cos x, \qquad \text{即} \qquad \sin x \mp \cos x = (4n+1)\tfrac{\pi}{2}.$$

? **想一想** 為甚麼右邊不可能很小？

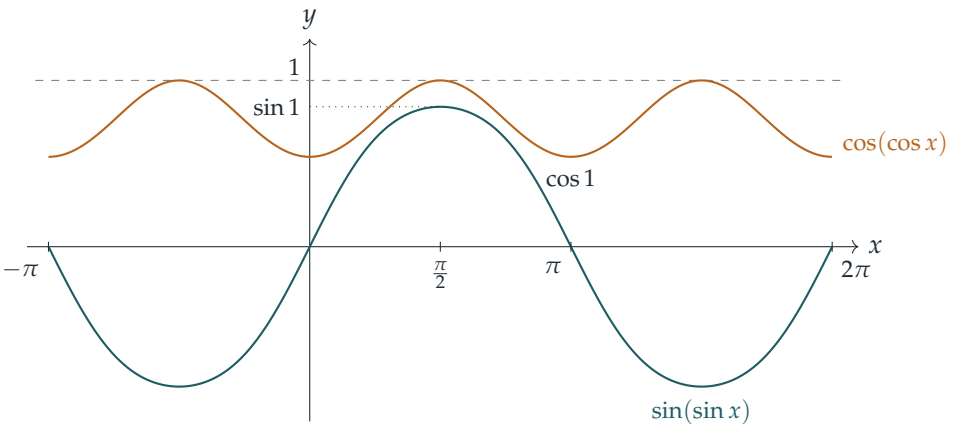
因為 $4n+1$ 是奇數，它永遠不等於 0，所以 $|4n+1| \ge 1$，右邊的絕對值（modulus）最少是 $\frac{\pi}{2} \approx 1.571$。而左邊的絕對值最多是 $\sqrt{2} \approx 1.414$。由於 $\sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$（兩邊平方：$2 < \frac{\pi^2}{4}$，因為 $\pi^2 > 9 > 8$），這是不可能的。因此 $\sin(\sin x) = \cos(\cos x)$ 無解。

繪畫 $y = \sin(\sin x)$ 和 $y = \cos(\cos x)$ 的草圖

$y = \sin(\sin x)$。內層函數 $\sin x$ 的取值範圍是 $[-1, 1]$，而在這個區間上 sin 是遞增的（因為 $[-1,1] \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$）。所以 $\sin(\sin x)$ 的升降與 $\sin x$ 完全一致：它的週期為 2π，是奇函數（odd function），在 $x = n\pi$ 處為零，在 $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ 處取極大值 $\sin 1 \approx 0.841$，在 $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ 處取極小值 $-\sin 1$。它的斜率（gradient）$\cos x \cos(\sin x)$ 在原點等於 1。它看起來像一條稍為壓扁了的正弦曲線。

$y = \cos(\cos x)$。由於 $\cos(-u) = \cos u$ 及 $\cos(x + \pi) = -\cos x$，我們有 $\cos(\cos(x + \pi)) = \cos(\cos x)$：這個圖像的週期為 π，而且是偶函數（even function）。在 $[-1, 1]$ 上，$\cos u$ 在 $u = 0$ 處最大（$= 1$），在 $u = \pm 1$ 處最小（$= \cos 1 \approx 0.540$）。所以 $\cos(\cos x)$ 在 $\cos x = 0$ 之處，即 $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$，取極大值 1；在 $\cos x = \pm 1$ 之處，即 $x = n\pi$，取極小值 $\cos 1$。它永遠介乎 0.54 與 1 之間。

根據上一部分，兩條曲線永不相交；又因為 $\cos(\cos 0) = \cos 1 > 0 = \sin(\sin 0)$，由連續性（continuity）可知餘弦曲線處處嚴格位於正弦曲線之上。兩者在 $x \approx 0.88$ 附近最為接近（相距約 0.107），那裏 $\sin(\sin x)$ 幾乎到達頂峯，而 $\cos(\cos x)$ 仍在上升。



繪畫 $y = \sin(2\sin x)$ 的草圖

這個函數同樣以 2π 為週期，而且是奇函數，零點在 $x = n\pi$，所以只需弄清楚 $0 \leq x \leq \pi$ 的情況；在這個區間上，圖像關於 $x = \frac{\pi}{2}$ 對稱（因為 $\sin(\pi - x) = \sin x$）。

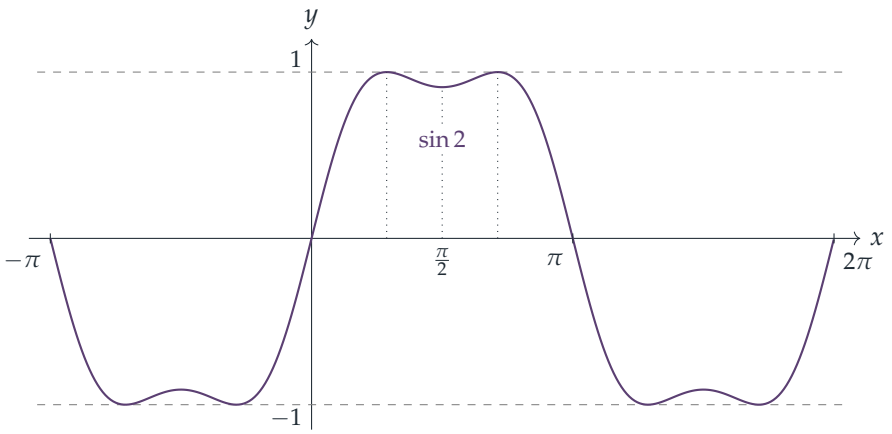
現在的分別在於，內層自變量 $u = 2\sin x$ 在這個區間上的取值範圍是 $[0, 2]$，而 $2 > \frac{\pi}{2}$。所以當 x 由 0 增加到 $\frac{\pi}{2}$ 時：

- u 由 0 上升到 $\frac{\pi}{2}$，同時 $\sin x$ 上升到 $\frac{\pi}{4}$，此時 $x = \arcsin\frac{\pi}{4} \approx 0.903$；期間 $y = \sin u$ 由 0 上升到它的極大值 1；
- u 繼續由 $\frac{\pi}{2}$ 增加到 2，在這一段 $\sin u$ 是遞減的，所以 y 回落，在 $x = \frac{\pi}{2}$ 處降至 $\sin 2 \approx 0.909$。

根據對稱性，y 在 $x = \pi - \arcsin\frac{\pi}{4} \approx 2.238$ 處再次升至 1，然後在 $x = \pi$ 處降至 0。用導數（derivative）驗證，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\cos x \cos(2\sin x),$$

它等於零，恰好是當 $\cos x = 0$（在 $\frac{\pi}{2}$ 處的局部極小值）或 $2\sin x = \pm\frac{\pi}{2}$（值為 1 的極大值）之時；在原點的斜率為 2。在 $[\pi, 2\pi]$ 上，圖像是上述情況的反射：兩個值為 -1 的極小值，中間在 $x = \frac{3\pi}{2}$ 處有一個值為 $-\sin 2$ 的局部極大值。正弦曲線的每一個峯都變成了帶有淺淺凹陷的駝峯。



驗算

- 取 $B = 0.3$ 和 $n = 1$：$A = \frac{5\pi}{2} - 0.3$ 給出 $\sin A = \cos 0.3 \approx 0.9553$，與預期相符。
- 在一個週期內用細密的格點計算 $\cos(\cos x) - \sin(\sin x)$，得到最小值約為 0.107（在 $x \approx 0.878$ 附近），從不為零，這印證了兩條曲線並不相交。
- 對於 $\sin(2\sin x)$，在 $[0, \pi]$ 上作數值搜尋，恰好找到三個轉向點（turning points）：在 $x \approx 0.903$ 和 2.238 處的極大值 1，以及在 $\frac{\pi}{2}$ 處的極小值 $\sin 2 \approx 0.909$。

常見錯誤

- 只寫出 $A = \frac{\pi}{2} - B + 2n\pi$，而遺漏了第二組解 $A = \frac{\pi}{2} + B + 2n\pi$，這組解來自 $\sin(\pi - C) = \sin C$。
- 忘記了 $n = 0$ 也是容許的，只檢查 $|4n + 1| \geq 5$ 的情況：最關鍵的比較，正是與 $\frac{\pi}{2}$ 本身的比較。
- 把 $\sin(2\sin x)$ 畫成一條高度為 1 的普通正弦曲線：由於 $2 > \frac{\pi}{2}$，內層自變量會越過正弦函數的頂峯，因而在 $x = \frac{\pi}{2}$ 處出現凹陷。

STEP 之外

這裏的草圖全都關乎函數的複合（composition）：$f(g(x))$ 的形狀取決於 g 的值域（range）覆蓋了 f 的圖像的哪一部分。把這個想法反覆迭代（$\sin(\sin(\sin x))$，如此類推），便會引向不動點（fixed points）和迭代映射（iterated maps）的動力學，當中要問的是 $f(f(\cdots f(x)))$ 何時會穩定下來。至於那個不等式論證，即比較等式兩邊各自可能的取

值範圍，則是分析學（analysis）中隨處可見的一種技巧的簡單例子；Abbott 的 *Understanding Analysis* 是了解如何把這類論證嚴格化的好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。