詳細解答

STEP II 2005，第 9 題

力學 • 斜面上的摩擦力

> **STEP II 2005，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/05-s2-q9

關鍵思路

把兩個質點（particle）分開處理。A 沒有受到外加的力，所以由它的方程便可確定繩子必須提供的張力（tension）。所有可供選擇的餘地，都在於 P 作用於 B 的方向。把 P 傾斜會改變 B 所受的法向反作用力（normal reaction），從而改變 B 所受的摩擦力（friction）。令 P 偏離斜面，會浪費它沿斜面方向的部分分量，卻同時改變了摩擦力；最佳的傾斜角度正好令這兩種效應取得平衡。最後問題歸結為求形如 $a\cos\theta + b\sin\theta$ 的式子的最大值。

解答

我們把 A 和 B 視為質點，並把繩子視為輕而不可伸長（light and inextensible），且沿 ℓ 放置。我們取 P 作用於包含 ℓ 的鉛垂平面內。P 橫過斜面的分量毫無幫助。注意

$$\sin 30^\circ = \tfrac{1}{2}, \qquad \cos 30^\circ = \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \tan 30^\circ = \tfrac{1}{\sqrt{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}.$$

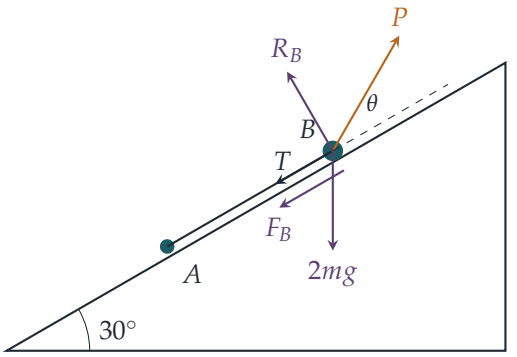
所以 $\mu_B = \tan 30^\circ$：若只有 B 本身，它恰好處於即將滑動的狀態。另外 $\mu_A = \frac{1}{2}\tan 30^\circ$，所以若只有 A 本身，它會滑下。

質點 A。沿垂直於斜面的方向分解，得 $R_A = mg\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$，所以 A 所受的最大摩擦力為

$$\mu_A R_A = \tfrac{\sqrt{3}}{6}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}mg = \tfrac{1}{4}mg.$$

重量沿斜面向下的分量為 $mg\sin 30^\circ = \frac{1}{2}mg$。

質點 B。設 P 與 ℓ 向上的方向成角 θ，以離開斜面的一方為正。（θ 為負表示 P 把質點壓向斜面。）設 T 為張力。



圖中所示的摩擦力 F_B 沿斜面向下，即第 (i) 部分的情況。沿垂直於斜面的方向，

$$R_B + P\sin\theta = 2mg\cos 30^\circ \quad\Longrightarrow\quad R_B = \sqrt{3}\,mg - P\sin\theta.$$

所以 B 處可提供的最大摩擦力為

$$\mu_B R_B = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\,mg - P\sin\theta\right) = mg - \tfrac{1}{\sqrt{3}}P\sin\theta.$$

B 的重量沿斜面向下的分量為 $2mg\sin 30^\circ = mg$。

第 (i) 部分

要令兩個質點沿 ℓ 向上移動，每個質點所受的摩擦力都沿斜面向下。當 P 取最小值時，兩者都處於即將移動的狀態，所以兩者所受的摩擦力都是極限摩擦力(limiting friction)。

要令 A 向上移動，繩子必須克服重量的分量和摩擦力：

$$T = \tfrac{1}{2}mg + \tfrac{1}{4}mg = \tfrac{3}{4}mg.$$

對於 B，沿斜面方向，P 的分量必須克服 T、重量的分量和極限摩擦力：

$$P\cos\theta = \tfrac{3}{4}mg + mg + \left(mg - \tfrac{1}{\sqrt{3}}P\sin\theta\right),$$

$$P\left(\cos\theta + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\right) = \tfrac{11}{4}mg.$$

想一想 把 P 傾斜離開斜面，明明會減少 P 沿斜面的分量，為甚麼反而有幫助？

把 B 稍微向上提，會減少 R_B，從而減少 P 需要克服的摩擦力。當傾斜角 θ 很小時，$\cos\theta$ 只按 $1 - \frac{1}{2}\theta^2$ 的方式下降，而 $\sin\theta$ 則按 θ 的方式增長。所以起初是摩擦力減少所帶來的好處佔優。要求出最佳角度，可寫成

$$\cos\theta + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta = \tfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \tfrac{1}{2}\sin\theta\right) = \tfrac{2}{\sqrt{3}}\cos(\theta - 30^\circ).$$

此式最大為 $\frac{2}{\sqrt{3}}$，而等號恰好在 $\theta = 30^\circ$ 時成立。由於 P 乘以這個因子必須等於 $\frac{11}{4}mg$，所以當這個因子最大時 P 最小：

$$P_{\min} = \tfrac{11}{4}mg \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{11}{8}\sqrt{3}\,mg,$$

這正是所要求的結果。我們必須檢查 B 仍然留在斜面上：

$$R_B = \sqrt{3}\,mg - \tfrac{11}{8}\sqrt{3}\,mg \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{16}\sqrt{3}\,mg > 0.$$

所以 P 作用於通過 ℓ 的鉛垂平面內，與 ℓ 成 30°，並偏向離開斜面的一方。換言之，它**與水平成** 60° **向上**，把質點沿斜面向上拉。（留意與斜面所成的最佳角度是 $\arctan \mu_B$，即 B 的摩擦角（angle of friction）。）

第 (ii) 部分

現在 P 只需阻止系統向下滑，所以每個質點所受的摩擦力都沿斜面向上。若沒有 P，A 不能獨自保持靜止，因為它的重量分量 $\frac{1}{2}mg$ 大於最大摩擦力 $\frac{1}{4}mg$。所以繩子必須拉住 A：

$$T \geq \tfrac{1}{2}mg - \tfrac{1}{4}mg = \tfrac{1}{4}mg.$$

特別地，繩子必須拉緊。要令 B 不向下滑，沿斜面向上的力必須足以平衡 T 和重量的分量：

$$P\cos\theta + \left(mg - \tfrac{1}{\sqrt{3}}P\sin\theta\right) \geq T + mg.$$

左邊與 T 無關，所以最小的 P 對應最小的張力 $T = \frac{1}{4}mg$。於是

$$P\left(\cos\theta - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\right) \geq \tfrac{1}{4}mg.$$

而 $\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos(\theta + 30^\circ) \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$，等號在 $\theta = -30^\circ$ 時成立。這一次，最佳方向是把 B 壓向斜面，這樣會增大 R_B，從而增大有助穩住 B 的摩擦力。因此力的最小量值為

$$P_{\min} = \tfrac{1}{4}mg \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{1}{8}\sqrt{3}\,mg.$$

它的方向在 ℓ 向上方向之下 30°。由於 ℓ 以 30° 向上傾斜，這個方向正是水平方向：即沿水平方向把 B 推向斜面。取這個值時，A 和 B 都處於極限平衡（limiting equilibrium），而 $T = \frac{1}{4}mg$。

驗算

- 我們取 $m = g = 1$ 作數值檢驗。在鉛垂平面內掃描 P 的每一個方向，並以二分法（bisection）求出每個方向所需的最小 P。在 (i) 中，最小值為 2.3816 $\approx \frac{11}{8}\sqrt{3}$，出現於與斜面成 30.0° 之處。在 (ii) 中，最小值為 0.2165 $\approx \frac{1}{8}\sqrt{3}$，出現於 -30.0°，即水平方向。我們亦確認了在 (ii) 的最小值處確實存在完整的平衡狀態。

- 就 (i) 而言，當 P 沿斜面方向（$\theta = 0$）時，把各項加起來：所需的 $P = \frac{1}{2}mg + \frac{1}{4}mg + mg + mg = \frac{11}{4}mg \approx 2.75mg$。這比 $2.38mg$ 大，正如所料。
- 就 (ii) 而言，當 P 沿斜面方向時，系統需要 $\frac{3}{2}mg - \frac{1}{4}mg - mg = \frac{1}{4}mg$。水平推力的效果更佳，只需 $\frac{\sqrt{3}}{8}mg \approx 0.217mg$。

常見錯誤

- 假設 P 沿斜面方向作用。題目問的是最小的量值，所以方向可由你自行選擇。
- 忘記 $P\sin\theta$ 會改變 R_B，因而改變 B 所受的極限摩擦力。
- 在 (ii) 中沿用 (i) 的摩擦力方向。當要防止的是向下滑動時，摩擦力沿斜面向上。

STEP 之外

兩部分都建基於同一原理：對抗摩擦力時最有效率的力，與運動方向所成的角正是摩擦角 $\lambda = \arctan\mu$。在 (i) 中它偏離斜面，在 (ii) 中則偏向斜面。原因是法向反作用力與極限摩擦力可合成為單一個「總反作用力」（total reaction），它與法線成角 λ。以這個總反作用力來思考，許多摩擦力問題都可化為力三角形（triangle of forces）的幾何問題。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）以大學一年級的程度，仔細地處理了摩擦力和受約束運動。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。