詳細解答

STEP II 2005，第 8 題

純數學 • 可分離變量微分方程

STEP II 2005，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/05-s2-q8

關鍵思路

這條方程是可分離變數(separable)的：與 y 有關的部分只有 y^2 這一個因子，所以除以它之後便得到 $\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，也就是 $-1/y$ 的導數。對 x 的積分可用代換 (substitution) $u = 1 + x^2$ 來處理，因為奇數次冪 x^3 正好提供了 u 所需要的 $x\,\mathrm{d}x$。至於第二條曲線，留意右邊是 z^3 而不是 y^2：這時應該考慮的量是 $1/z^2$，而它原來與 $1/y$ 滿足完全相同的方程。

解答

求 y

在 C 上有 $y(0) = 1 > 0$，而當 $x \geq 0$ 時方程的右邊永不為負，所以 y 永不遞減。因此 $y \geq 1$ 恆成立，我們可以除以 y^2：

$$\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^3}{(1+x^2)^{5/2}} \quad\Longrightarrow\quad -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{x^3}{(1+x^2)^{5/2}}.$$

計算積分時，設 $u = 1 + x^2$，於是 $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$，而 $x^3\,\mathrm{d}x = x^2 \cdot x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(u-1)\,\mathrm{d}u$：

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{(1+x^2)^{5/2}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int (u^{-3/2} - u^{-5/2})\,\mathrm{d}u = -u^{-1/2} + \tfrac{1}{3}u^{-3/2} + \text{常數} \\ &= -\frac{3u-1}{3u^{3/2}} + \text{常數} = -\frac{2+3x^2}{3(1+x^2)^{3/2}} + \text{常數}.\end{aligned}$$

因此

$$\frac{1}{y} = \frac{2+3x^2}{3(1+x^2)^{3/2}} + k$$

其中 k 為某個常數。在 $x = 0$ 處，上式變成 $1 = \frac{2}{3} + k$，所以 $k = \frac{1}{3}$，這就是所要求的結果：

$$\frac{1}{y} = \frac{2 + 3x^2}{3(1 + x^2)^{3/2}} + \frac{1}{3}.$$

x 很大時

把主導的冪次提出來：從分子提出 $3x^2$，從 $(1 + x^2)^{3/2}$ 提出 x^3：

$$\frac{2 + 3x^2}{3(1 + x^2)^{3/2}} = \frac{3x^2(1 + \frac{2}{3x^2})}{3x^3(1 + \frac{1}{x^2})^{3/2}} = \frac{1}{x}\Big(1 + \frac{2}{3x^2}\Big)\Big(1 - \frac{3}{2x^2} + \cdots\Big) = \frac{1}{x} + O\Big(\frac{1}{x^3}\Big),$$

這裏用了二項展開（binomial expansion）；由於 $1/x^2 < 1$ 對很大的 x 成立，展開式有效。所以

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{3} + \frac{1}{x} + O\Big(\frac{1}{x^3}\Big) = \frac{1}{3}\Big(1 + \frac{3}{x} + O\Big(\frac{1}{x^3}\Big)\Big),$$

再取倒數，並利用 $(1 + t)^{-1} = 1 - t + O(t^2)$，得

$$y = 3\Big(1 - \frac{3}{x} + O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big) \approx 3 - \frac{9}{x},$$

正如題目所求。

? **想一想** 為甚麼可以捨去 $\frac{2}{3x^2}$ 和 $-\frac{3}{2x^2}$ 這兩項，卻不能捨去 $\frac{1}{x}$？

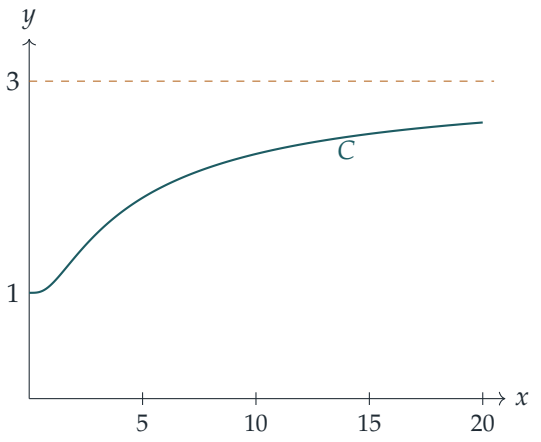
目標 $3 - \frac{9}{x}$ 準確至 $\frac{1}{x}$ 階。在 $1/y$ 中，各修正項比 $\frac{1}{x}$ 還要小一個 $\frac{1}{x^2}$ 的因子，所以它們只會在 $\frac{1}{x^2}$ 階或更高階影響 y。而 $\frac{1}{x}$ 這一項本身，正是產生 $-\frac{9}{x}$ 的來源。

C 的略圖

現在把曲線的特徵整理出來。

- $y(0) = 1$，而且 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$ 於 $x = 0$ 處成立。在原點附近 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \approx x^3$，所以 $y \approx 1 + \frac{1}{4}x^4$：曲線起初非常平坦。
- 當 $x > 0$ 時斜率嚴格為正，所以 y 遞增。
- $1/y$ 的第一項為正，所以 $1/y > \frac{1}{3}$，由此得 $1 \le y < 3$ 對所有 x 成立。曲線永不會趨向無窮大。
- 當 $x \to \infty$ 時，$y \to 3$ 從下方趨近，形如 $3 - \frac{9}{x}$。這個趨近過程很慢：$y(10) \approx 2.31$。

由於曲線起初向上凹，其後漸趨平緩並靠近 $y = 3$，它必定有一個拐點（point of inflection）。



z 的曲線

只要 $z \neq 0$，我們就可以除以 z^3。由於 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(z^{-2}\right) = -2z^{-3}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{z^2}\right) = -\frac{2}{z^3}\cdot\frac{x^3z^3}{2(1+x^2)^{5/2}} = -\frac{x^3}{(1+x^2)^{5/2}},$$

這正是 $1/y$ 所滿足的方程。在兩條曲線上，$1/z^2 = 1$ 於 $x = 0$ 處成立，與 $1/y$ 的值相同。所以

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{y}, \qquad \text{即} \qquad z^2 = y.$$

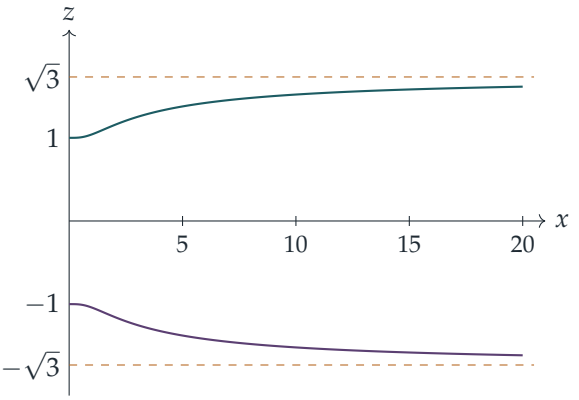
這同時確認了 z 永不會到達 0，從而說明剛才的除法是合理的。只要 $z \neq 0$，便有 $z^2 = y \geq 1$，所以 z 不可能接近 0。根據連續性，z 會一直保持起始時的正負號，於是兩條曲線分別是

$$z = \sqrt{y} \quad (z(0) = 1), \qquad z = -\sqrt{y} \quad (z(0) = -1).$$

上方的曲線由 1 上升並趨向 $\sqrt{3}$，同樣是起初很平坦（這次是 $z \approx 1 + \frac{1}{8}x^4$），而當 x 很大時

$$z = \sqrt{3}\left(1 - \frac{3}{x} + \cdots\right)^{1/2} \approx \sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2x}.$$

下方的曲線是它對 x 軸的反射：它由 -1 下降，趨向漸近線（asymptote）$z = -\sqrt{3}$。



想一想 為甚麼 $z(0) = -1$ 的那條曲線，不只是把另一條曲線平移或作其他變換而得的複製品？

這條方程對 z 而言是奇的：把 z 換成 $-z$，兩邊都會乘上因子 -1。所以若 $z(x)$ 是解，則 $-z(x)$ 也是解，而由 -1 出發的解就是由 $+1$ 出發的解的反射。這與 $z = \pm\sqrt{y}$ 吻合。

驗算

- 對答案求導：由 $1/y = u^{-1/2} - \frac{1}{3}u^{-3/2} + \frac{1}{3}$，可得 $\mathrm{d}(1/y)/\mathrm{d}x = 2x\left(-\frac{1}{2}u^{-3/2} + \frac{1}{2}u^{-5/2}\right) = -x^3u^{-5/2}$，正合所需。
- 以數值方法（龍格－庫塔法，Runge–Kutta）解原方程，得 $y(1) = 1.08391$ 和 $y(5) = 1.89777$，與公式吻合至 10 位或以上有效數字。以數值方法解 z 的方程，得 $z(5) = \pm 1.37759 = \pm\sqrt{y(5)}$。
- 在 $x = 100$ 處，公式給出 $y = 2.9126$，而 $3 - \frac{9}{x} = 2.91$。兩者相差約 $27/x^2$，與 $O(1/x^2)$ 的誤差一致。

常見錯誤

- 漏掉負號：$\int y^{-2}\,\mathrm{d}y = -y^{-1}$。
- 斷定 $y \to 3$ 的速度很快，理由是 $3 - \frac{9}{x}$「看來很接近」3。其實在 $x = 10$ 處，曲線仍只到達約 2.3。
- 兩條曲線都寫成 $z = \sqrt{y}$，或者沒有解釋為甚麼 z 不能變號。

STEP 之外

兩條方程都具有 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f(x)\,y^n$ 的形式，這是*伯努利方程*（*Bernoulli equation*）的特殊情況；代換 $w = y^{1-n}$ 總能把這類方程化為線性方程。我們用的正是這個代換：$w = 1/y$ 和 $w = 1/z^2$。「方程相同，初值相同，所以函數相同」這一步，是一階方程的存在唯一性定理（existence and uniqueness theorem，即 Picard–Lindelöf 定理）的一個例子。Boyce 與 DiPrima 合著的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科書）對兩者都有論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。