詳細解答

# STEP II 2005，第 7 題

純數學 • 向量與圓周運動

> **STEP II 2005，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/05-s2-q7

## 關鍵思路

每個位置向量（position vector）都具有 cos(角) $\mathbf{a}$ + sin(角) $\mathbf{b}$ 的形式；當 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 互相垂直且長度相等時，它在 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 所在的平面上描出一個圓。一旦知道 $|OP|$ 和 $|OQ|$ 是常數，角 $POQ$ 便可直接由純量積（scalar product）求得，再用積化和差公式（product-to-sum formulae）把它整理成單一個餘弦。最後一部分就變成在兩個完整周期內關於一個餘弦的不等式。

## 解答

### 第 (i) 部分

以 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{q}$ 表示 $P$ 和 $Q$ 的位置向量。

對於 $P$，$\mathbf{p} = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$，所以 $|\mathbf{p}| = 1$，而且 $\mathbf{p}$ 位於 $xy$ 平面上。因此 $P$ 在平面 $z = 0$ 上沿着以 $O$ 為圓心、半徑為 1 的圓運動；從上方（即從正 $z$ 軸方向）看是逆時針方向，角速率（angular speed）恆為 1（所以速率為 1）。它由 $(1, 0, 0)$ 出發，當 $t$ 由 0 變到 $2\pi$ 時剛好轉一圈。

對於 $Q$，設 $s = t + \frac{1}{4}\pi$，並設

$$\mathbf{a} = \tfrac{3}{2}\mathbf{i} + \tfrac{3\sqrt{3}}{2}\mathbf{k}, \qquad \mathbf{b} = 3\mathbf{j}, \qquad \text{於是} \qquad \mathbf{q} = \cos s\,\mathbf{a} + \sin s\,\mathbf{b}.$$

現在 $|\mathbf{a}|^2 = \frac{9}{4} + \frac{27}{4} = 9$，$|\mathbf{b}|^2 = 9$，且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$。因此

$$|\mathbf{q}|^2 = 9\cos^2 s + 9\sin^2 s + 2\cos s \sin s\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = 9,$$

而且 $\mathbf{q}$ 始終位於通過 $O$、由 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{j}$ 張成的平面上。該平面包含 $y$ 軸和方向 $\mathbf{i} + \sqrt{3}\,\mathbf{k}$，所以它的方程是 $z = \sqrt{3}\,x$；它的法線（normal）$-\sqrt{3}\,\mathbf{i} + \mathbf{k}$ 與 $\mathbf{k}$ 的夾角為 $\arccos \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\pi$。

所以 $Q$ 在平面 $z = \sqrt{3}\,x$ 上沿着以 $O$ 為圓心、半徑為 3 的圓運動；這個平面包含 $y$ 軸，並與 $P$ 的圓所在的平面成 $60°$ 傾角。它的角速率同樣是 1（速率為 3），也是轉一圈，由 **a** 的方向轉向 **j**，而它的相位（phase）始終比 $P$ 的領先 $\frac{1}{4}\pi$：在 $t = 0$ 時，它位於與 **a** 成 $\frac{1}{4}\pi$ 角之處，即 $\frac{3}{2\sqrt{2}}(1,\, 2,\, \sqrt{3})$。

### 第 (ii) 部分

由於 $|\mathbf{p}| = 1$ 及 $|\mathbf{q}| = 3$，

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}{3} = \frac{\frac{3}{2}\cos t\cos s + 3\sin t\sin s}{3} = \tfrac{1}{2}\cos t\cos s + \sin t\sin s,$$

其中 $s = t + \frac{1}{4}\pi$。利用積化和差公式，並注意 $t + s = 2t + \frac{1}{4}\pi$ 及 $s - t = \frac{1}{4}\pi$，可得

$$\cos t\cos s = \tfrac{1}{2}[\cos(2t + \tfrac{1}{4}\pi) + \cos\tfrac{1}{4}\pi],$$
$$\sin t\sin s = \tfrac{1}{2}[\cos\tfrac{1}{4}\pi - \cos(2t + \tfrac{1}{4}\pi)].$$

記 $C = \cos(2t + \frac{1}{4}\pi)$，並利用 $\cos\frac{1}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$，

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \tfrac{1}{4}(C + \tfrac{\sqrt{2}}{2}) + \tfrac{1}{2}(\tfrac{\sqrt{2}}{2} - C)\\ &= \tfrac{\sqrt{2}}{8} + \tfrac{\sqrt{2}}{4} - \tfrac{1}{4}C = \tfrac{3\sqrt{2}}{8} - \tfrac{1}{4}\cos(2t + \tfrac{1}{4}\pi),\end{aligned}$$

這正是所要證明的結果。

### 第 (iii) 部分

**想一想** 怎樣把 $\theta \geq \frac{1}{4}\pi$ 轉化為關於 $\cos\theta$ 的條件？

餘弦在 $[0, \pi]$ 上嚴格遞減（strictly decreasing），而 $\theta$ 和 $\frac{1}{4}\pi$ 都在這個區間內，所以

$$\theta \geq \tfrac{1}{4}\pi \iff \cos\theta \leq \cos\tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{\sqrt{2}}{2} = \tfrac{4\sqrt{2}}{8}.$$

由第 (ii) 部分，這等價於

$$\tfrac{3\sqrt{2}}{8} - \tfrac{1}{4}\cos(2t + \tfrac{1}{4}\pi) \leq \tfrac{4\sqrt{2}}{8} \iff \cos(2t + \tfrac{1}{4}\pi) \geq -\tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

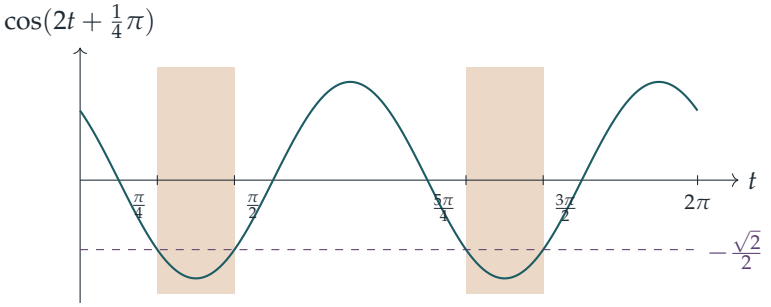
設 $u = 2t + \frac{1}{4}\pi$。當 $t$ 取遍 $[0, 2\pi]$ 時，$u$ 取遍 $[\frac{1}{4}\pi, \frac{17}{4}\pi]$，這個區間的長度是 $4\pi$：剛好是 $\cos u$ 的兩個周期。在任何一個周期內，$\cos u < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 恰好在一個長度為 $\frac{1}{2}\pi$ 的開區間上成立（即 $\frac{3}{4}\pi$ 與 $\frac{5}{4}\pi$ 之間，模 $2\pi$）。在這裏，不符合條件的值是

$$u \in (\tfrac{3}{4}\pi, \tfrac{5}{4}\pi) \cup (\tfrac{11}{4}\pi, \tfrac{13}{4}\pi) \iff t \in (\tfrac{1}{4}\pi, \tfrac{1}{2}\pi) \cup (\tfrac{5}{4}\pi, \tfrac{3}{2}\pi),$$

以 $t$ 計算，每段的長度為 $\frac{1}{4}\pi$。所以 $\theta < \frac{1}{4}\pi$ 的總時間是 $\frac{1}{2}\pi$，而 $\theta \geq \frac{1}{4}\pi$ 的總時間是

$$2\pi - \tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{3}{2}\pi,$$

這正是所要證明的結果。




陰影部分是曲線降到 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 以下的地方，也就是 $\theta < \frac{1}{4}\pi$ 的地方。

## 驗算

- 在 $t = 0$ 時：$\mathbf{p} = \mathbf{i}$ 及 $\mathbf{q} = \frac{3}{2\sqrt{2}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \sqrt{3}\,\mathbf{k})$，所以直接計算得 $\cos\theta = \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{4}$。公式則給出 $\frac{3\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$。兩者吻合。
- $\cos\theta$ 介乎 $\frac{3\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{4} \approx 0.280$ 與 $\frac{3\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{4} \approx 0.780$ 之間，所以 $\theta$ 永遠不會是 0。這是合理的：$\mathbf{p}$ 與 $\mathbf{q}$ 只可能沿着兩個平面相交的 $y$ 軸平行，但 $P$ 在 $t = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$ 時位於該軸上，而 $Q$ 則在 $t = \frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi$ 時位於該軸上。
- 在 $[0, 2\pi]$ 內對 $t$ 取二百萬個樣本點，並直接由向量計算 $\theta$，得出 $\theta \geq \frac{1}{4}\pi$ 的總時間為 4.712389，與 $\frac{3}{2}\pi \approx 4.712389$ 相符。

## 常見錯誤

- 忘記除以 $|\mathbf{p}||\mathbf{q}| = 3$，或因為 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{j}$ 的係數不同而以為 $|\mathbf{q}|$ 會變化。
- 把不等號的方向弄反：$\theta \geq \frac{1}{4}\pi$ 表示 $\cos\theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$，因為餘弦在 $[0, \pi]$ 上遞減。
- 只計算了 $\cos(2t + \frac{1}{4}\pi)$ 的一個周期：$2t$ 表示當 $t$ 轉一圈時，它轉了兩圈。

## STEP 之外

任何以原點為圓心的圓都可以寫成 $\cos s\,\mathbf{a} + \sin s\,\mathbf{b}$，其中 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ 且 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$；如果去掉這些條件，便會得到一個橢圓（ellipse），而一般來說，得到的是單位圓在線性映射（linear map）下的像。以這種方式理解曲線，並用純量積量度運動中的向量之間的夾角，正是大學一年級所學的線性代數（linear algebra）和向量微積分（vector calculus）的起點。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）把這些概念闡述得十分清晰。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。