詳細解答

STEP II 2005，第 6 題

純數學 • 二項式級數的和

STEP II 2005，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/05-s2-q6

關鍵思路

這裏每一個和都是某個冪級數(power series)在特定的 x 處的取值，所以要做的就是認出它來自哪一個函數。在第 (i) 部分，竅門是把 n 和 n^2 改寫成 1、$n+1$ 和 $(n+1)(n+2)$ 的組合，而這些正是我們剛剛寫下的係數。在第 (ii) 部分，只要留意到 $(1-x)^{-1/2}$ 和 $(1-x)^{-3/2}$ 的係數之間的關係，同樣的想法就行得通。

解答

第 (i) 部分

根據負整數指數的二項式定理（binomial theorem）（當 $|x|<1$ 時成立），對於 $n \geq 0$，x^n 的係數（coefficient）為

$$(1-x)^{-1}: \quad 1, \qquad (1-x)^{-2}: \quad n+1, \qquad (1-x)^{-3}: \quad \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

例如，$(1-x)^{-3}$ 中的係數是 $\dfrac{(-3)(-4)\cdots(-3-n+1)}{n!}(-1)^n = \dfrac{3\cdot 4\cdots(n+2)}{n!} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$。

第一個和。由於 $n=(n+1)-1$，當 $|x|<1$ 時

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x}.$$

（把和拆開是可以的，因為右邊兩個級數都收斂（converge）。）$n=0$ 的一項為零，所以代入 $x=\frac{1}{2}$，

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,2^{-n} = 4 - 2 = 2.$$

第二個和。我們想把 n^2 寫成 $(n+1)(n+2)$、$n+1$ 和 1 的組合。由於 $(n+1)(n+2) = n^2+3n+2$，

$$n^2 = (n+1)(n+2) - 3(n+1) + 1.$$

因此，當 $|x| < 1$ 時，

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x},$$

其中出現因子 2，是因為 $(1-x)^{-3}$ 中的係數是 $(n+1)(n+2)$ 的一半。同樣，$n=0$ 的一項為零，而在 $x = \frac{1}{2}$ 處

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 2^{-n} = 2\cdot 8 - 3\cdot 4 + 2 = 6.$$

第 (ii) 部分

根據指數為 $-\frac{1}{2}$ 的二項式定理，$(1-x)^{-1/2}$ 中 x^n 的係數是

$$\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2n-1}{2})}{n!}(-1)^n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\, n!}.$$

想一想 怎樣把奇數的連乘積化成階乘（factorial）？

把缺少的偶數補上：$(2n)! = (1\cdot 3\cdots(2n-1))(2\cdot 4\cdots 2n)$，而 $2\cdot 4\cdots 2n = 2^n n!$。所以 $1\cdot 3\cdots(2n-1) = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$，而係數就是

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n n!\cdot 2^n n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{1}{2^{2n}}.$$

這對 $n=0$ 也成立（空積，$a_0 = 1$），所以當 $|x| < 1$ 時

$$(1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{x^n}{2^{2n}},$$

正如所求。

第一個和。題目所求的和是 $\sum a_n x^n$ 在 $x = \frac{1}{3}$ 處的值，而這一點位於展開式成立的區間之內。所以它等於

$$\left(1-\tfrac{1}{3}\right)^{-1/2} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

第二個和。現在我們需要 $\sum n a_n x^n$。按照第 (i) 部分的思路，把 na_n 與一個我們已知的級數聯繫起來。與上面完全一樣，$(1-x)^{-3/2}$ 中 x^m 的係數是

$$b_m = \frac{3\cdot 5\cdots(2m+1)}{2^m\, m!} = (2m+1)\, a_m.$$

由 a_n 的公式，相鄰兩個係數之比是 $a_n/a_{n-1} = \dfrac{(2n)(2n-1)}{n^2 \cdot 4} = \dfrac{2n-1}{2n}$，所以對於 $n \geq 1$

$$n\,a_n = \tfrac{1}{2}(2n-1)\,a_{n-1} = \tfrac{1}{2}\,b_{n-1}.$$

因此，當 $|x| < 1$ 時，

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = \frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1}x^{n-1} = \frac{x}{2}(1-x)^{-3/2}.$$

（等價的做法是：把 $(1-x)^{-1/2}$ 的級數逐項求導（differentiate term by term），這在它的收斂區間（interval of convergence）內是容許的，然後乘以 x。）在 $x = \frac{1}{3}$ 處：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,(2n)!}{(n!)^2\,2^{2n}\,3^n} = \frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{8}.$$

驗算

- $\sum n2^{-n}$ 的首幾項是 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\cdots$，加到第四項已經是 1.625，並慢慢向 2 靠近；$\sum n^2 2^{-n}$ 加到 200 項的部分和（partial sum）與 6 吻合至小數點後很多個位。
- 數值上，$\sqrt{6}/2 \approx 1.224745$ 而 $\sqrt{6}/8 \approx 0.306186$；第 (ii) 部分兩個級數的部分和與這兩個值吻合至小數點後 12 個位。
- 對通項作一個簡單的合理性檢查：$n = 1$ 給出 $a_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$，正是 $(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots$ 中那個熟悉的係數。

常見錯誤

- 忘記了 $(1-x)^{-3}$ 的係數中的 $\frac{1}{2}$，結果得出 $8 - 12 + 2 = -2$ 作為 $\sum n^2 2^{-n}$ 的值，而正項之和不可能是負數。
- 把 $(1-x)^{-2}$ 的級數的係數寫成 n 而不是 $n+1$：這個級數是 $1 + 2x + 3x^2 + \cdots$。
- 在最後一個和中，漏掉一個因子 x：$\sum n a_n x^{n-1}$ 是導數，但題目所求的和是 $\sum n a_n x^n$。

STEP 之外

這裏用到的手法（把級數拆成幾部分、逐項求導）之所以合理，是因為冪級數在其收斂半徑（radius of convergence）之內絕對收斂（converges absolutely），並且可以在那裏逐項求導。嚴謹地證明這一點，是大學第一門分析（analysis）課程的標準內容。係數 $\binom{2n}{n}/4^n$ 也會在概率中出現，它就是簡單隨機漫步（simple random walk）在走了 $2n$ 步之後回到

起點的概率。關於分析方面的內容，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本分析入門書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。