詳細解答

STEP II 2005，第 5 題

純數學 • 內切圓與外接圓

STEP II 2005，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/05-s2-q5

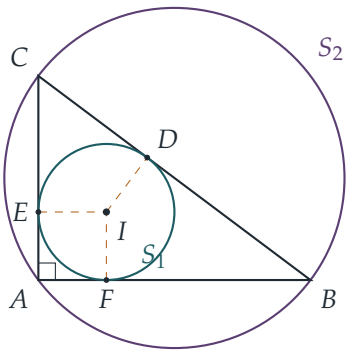
關鍵思路

由圓外一點向圓所作的兩條切線（tangent）長度相等。把這個性質用於每個頂點，三角形的每條邊便分成兩段切線長，而在直角那個頂點，兩段切線長剛好都是 r。這樣幾乎立刻就得到 r 的公式。至於面積比，直角告訴我們斜邊（hypotenuse）是 S_2 的直徑，而畢氏定理（Pythagoras' theorem）讓我們把一切只用 $b+c$ 和 a 表示，這就是 q 出現的原因。

解答

內切圓半徑

設 S_1 的圓心為 I，並分別與 BC、CA、AB 相切於 D、E、F。



半徑與切線互相垂直，所以 $IE \perp AC$ 及 $IF \perp AB$。連同 A 處的直角，可知 $AEIF$ 是長

方形，而且它的一對鄰邊 $IE = IF = r$，所以它是正方形，並且

$$AE = AF = r.$$

由圓外一點所作的切線長度相等，所以 $BF = BD$ 及 $CE = CD$。因此

$$c = AF + FB = r + BD, \qquad b = AE + EC = r + CD, \qquad a = BD + DC.$$

把首兩式相加，再減去第三式，

$$b + c - a = 2r + BD + CD - (BD + DC) = 2r,$$

這正是所需的結果。

面積比

由於 $\angle BAC = 90°$，根據半圓上的圓周角定理（angle in a semicircle theorem）的逆定理，BC 是外接圓（circumcircle）S_2 的直徑。所以 S_2 的半徑是 $\frac{1}{2}a$，面積是 $\frac{1}{4}\pi a^2$。

S_1 與三角形之間的區域，就是三角形除去 S_1 的圓盤後餘下的部分，所以它的面積是 $\frac{1}{2}bc - \pi r^2$。因此

$$R = \frac{\frac{1}{2}bc - \pi r^2}{\frac{1}{4}\pi a^2}, \qquad \text{所以} \qquad \pi R = \frac{2bc - 4\pi r^2}{a^2} = \frac{2bc}{a^2} - \pi\,\frac{(b + c - a)^2}{a^2},$$

這裏用了 $2r = b + c - a$。

? **想一想** 怎樣把 $2bc/a^2$ 化成只含 q 的式子？

由畢氏定理得 $b^2 + c^2 = a^2$，所以 $2bc = (b + c)^2 - (b^2 + c^2) = (b + c)^2 - a^2$。除以 a^2，

$$\frac{2bc}{a^2} = q^2 - 1, \qquad \frac{(b + c - a)^2}{a^2} = \left(\frac{b + c}{a} - 1\right)^2 = (q - 1)^2.$$

因此

$$\begin{aligned} \pi R &= q^2 - 1 - \pi(q^2 - 2q + 1) \\ &= -(\pi - 1)q^2 + 2\pi q - (\pi + 1), \end{aligned}$$

這就是所求的結果。

R 的上界

右邊是 q 的二次式，首項係數 $-(\pi-1)$ 為負數，所以我們用配方法（completing the square）：

$$\begin{aligned}\pi R &= -(\pi-1)\left(q^2 - \frac{2\pi}{\pi-1}\,q\right) - (\pi+1)\\ &= -(\pi-1)\left(q - \frac{\pi}{\pi-1}\right)^2 + \frac{\pi^2}{\pi-1} - (\pi+1)\\ &= -(\pi-1)\left(q - \frac{\pi}{\pi-1}\right)^2 + \frac{\pi^2-(\pi^2-1)}{\pi-1}\\ &= \frac{1}{\pi-1} - (\pi-1)\left(q - \frac{\pi}{\pi-1}\right)^2.\end{aligned}$$

由於 $\pi-1>0$，平方項是被減去的，所以對任何實數 q 都有 $\pi R \le \dfrac{1}{\pi-1}$；再除以 $\pi>0$，

$$R \le \frac{1}{\pi(\pi-1)}.$$

這就是題目要求我們推導的結論。

值得留意的是，這個上界其實並不能達到。等號成立需要 $q=\pi/(\pi-1)\approx 1.467$，但對直角三角形而言，$(b+c)^2 = a^2+2bc \le a^2+(b^2+c^2) = 2a^2$（由算術平均—幾何平均不等式（AM–GM），$2bc \le b^2+c^2$），所以 $q \le \sqrt{2} \approx 1.414$。$R$ 的最大可能值來自等腰三角形，即 $q=\sqrt{2}$，此時 $R=(2\sqrt{2}\,\pi-3\pi+1)/\pi \approx 0.1467$，僅略低於上界 $1/(\pi(\pi-1)) \approx 0.1486$。

驗算

對於 3–4–5 三角形（$b=4$，$c=3$，$a=5$），公式給出 $r=1$；而面積 6 除以半周長（semi-perimeter）6 的確是 1，這正是標準公式 $r=$ 面積$/s$。於是 $R=(6-\pi)/(\frac{25}{4}\pi)\approx 0.14558$，而把 $q=1.4$ 代入二次式也得到相同的值。隨機測試了 10^5 個直角三角形，每一次都驗證了 πR 的恆等式，而且沒有發現 R 超過 0.14674，與上界 0.14863 吻合。

常見錯誤

- 忘記 S_2 的半徑是 $\frac{1}{2}a$ 而不是 a：斜邊是*直徑*。
- 試圖直接展開 $2bc/a^2$，而沒有利用 $b^2+c^2=a^2$ 把它寫成 $2bc=(b+c)^2-a^2$。
- 沒有檢查 $q=\pi/(\pi-1)$ 是否可以取到，就聲稱上界可以達到；其實並不能達到，不過題目只要求證明不等式。

STEP 之外

一般三角形的內切圓（incircle）與外接圓，由歐拉（Euler）公式 $d^2 = R_2(R_2 - 2r)$ 聯繫起來，其中 d 是兩圓圓心之間的距離，R_2 是外接圓半徑（circumradius）；由此可得 $R_2 \geq 2r$，而等號只在等邊三角形時成立。這類結果，以及在一族圖形中求某個比值的最優值這種想法，都通往幾何不等式（geometric inequalities）的研究。Coxeter 與 Greitzer 合著的 *Geometry Revisited*（《幾何學的再探索》）是很優美的下一步讀物，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》，免費，採用 CC BY 授權）則有更多 STEP 風格的練習。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。