詳細解答

STEP II 2005，第 4 題

純數學 • 反正切恆等式

STEP II 2005，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/05-s2-q4

關鍵思路

處理反正切（inverse tangent）之和，方法是對等式兩邊取正切，再運用 $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$。條件 $bc = a^2 + 1$ 恰好令分母可以因式分解（factorise），並與分子約去。其後的問題就在於結構：第一個結果是一條把一個反正切拆開成兩個的法則，而四項恆等式（identity）就是把這條法則用兩次，在樹的每一層各用一次。至於數值部分，則要倒推回去，找出是哪一種拆法產生了那四個數。

解答

第一個恆等式

設 $A = \arctan\frac{1}{a+b}$ 及 $B = \arctan\frac{1}{a+c}$。由於 $a, b, c > 0$，$\frac{1}{a+b}$ 與 $\frac{1}{a+c}$ 均為正數，所以 $A, B \in (0, \frac{\pi}{2})$，而 $A + B \in (0, \pi)$。利用 $bc = a^2 + 1$，

$$\begin{aligned}(a+b)(a+c) - 1 &= a^2 + ab + ac + bc - 1 \\ &= 2a^2 + ab + ac = a(2a + b + c).\end{aligned}$$

因此，根據複角公式（addition formula），

$$\begin{aligned}\tan(A+B) &= \frac{\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{a+c}}{1 - \dfrac{1}{(a+b)(a+c)}} = \frac{(a+c)+(a+b)}{(a+b)(a+c) - 1} \\ &= \frac{2a+b+c}{a(2a+b+c)} = \frac{1}{a},\end{aligned}$$

其中因為 $2a + b + c > 0$，所以可以約去。

想一想 由 $\tan(A+B)=\frac{1}{a}$ 真的可以得出 $A+B=\arctan\frac{1}{a}$ 嗎？

不是必然的：tan 的週期（period）為 π，所以我們需要 $A+B$ 位於 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 之內，即 arctan 的值域（range）。我們已知 $A+B\in(0,\pi)$。此外 $(a+b)(a+c)-1=a(2a+b+c)>0$，所以 $\tan A\tan B<1$，複角公式中的分母為正數；加上分子為正數，便得 $\tan(A+B)>0$，這就排除了 $A+B\in[\frac{\pi}{2},\pi)$ 的可能。（事實上，$\tan(A+B)$ 在 $\frac{\pi}{2}$ 處無定義，而在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上為負數。）所以 $A+B\in(0,\frac{\pi}{2})$，而 $\arctan\frac{1}{a}$ 是該區間內唯一一個正切值為 $\frac{1}{a}$ 的角，故

$$\arctan\frac{1}{a+b}+\arctan\frac{1}{a+c}=\arctan\frac{1}{a}. \qquad \blacksquare$$

四項恆等式

把第一個恆等式應用三次；每次所涉及的三個數均為正數。

- 取 $a=p+q$、$b=s$、$c=t$：條件為 $st=(p+q)^2+1$，這是已知的，所以

$$\arctan\frac{1}{p+q+s}+\arctan\frac{1}{p+q+t}=\arctan\frac{1}{p+q}.$$

- 取 $a=p+r$、$b=u$、$c=v$：條件 $uv=(p+r)^2+1$ 是已知的，所以

$$\arctan\frac{1}{p+r+u}+\arctan\frac{1}{p+r+v}=\arctan\frac{1}{p+r}.$$

- 取 $a=p$、$b=q$、$c=r$：條件 $qr=p^2+1$ 是已知的，所以

$$\arctan\frac{1}{p+q}+\arctan\frac{1}{p+r}=\arctan\frac{1}{p}.$$

把首兩式相加，再利用第三式，可知四個反正切之和為 $\arctan\frac{1}{p}$，正是所求。$\blacksquare$

數值恆等式

我們需要 $p=7$，所以 $qr=50$。與其猜測 q 和 r，不如由那四個數倒推回去。若 13 和 21 是某次使用第一個恆等式時的一對 $a+b$、$a+c$，則 $b=13-a$、$c=21-a$，而 $bc=a^2+1$ 給出

$$(13-a)(21-a)=a^2+1 \iff 273-34a=1 \iff a=8.$$

同樣地，若 82 和 187 是一對，則

$$(82-a)(187-a)=a^2+1 \iff 15334-269a=1 \iff a=57.$$

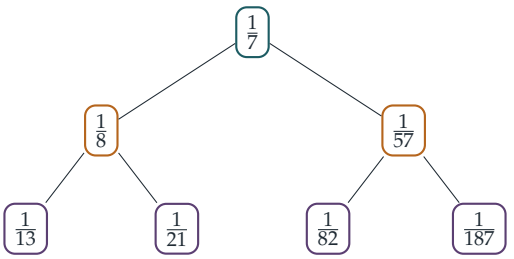
於是嘗試取 $p+q=8$ 及 $p+r=57$，即 $q=1$、$r=50$；然後 $s=13-8=5$、$t=21-8=13$、$u=82-57=25$、$v=187-57=130$。七個數全為正數，而三個條件均成立：

$$qr=50=7^2+1,\qquad st=65=8^2+1,\qquad uv=3250=57^2+1.$$

取這些值時，$p+q+s=13$、$p+q+t=21$、$p+r+u=82$ 及 $p+r+v=187$，所以由四項恆等式可得

$$\arctan\frac{1}{13}+\arctan\frac{1}{21}+\arctan\frac{1}{82}+\arctan\frac{1}{187}=\arctan\frac{1}{7}. \qquad \blacksquare$$

下面的樹顯示 $\arctan\frac{1}{7}$ 如何拆開。



每個節點的反正切都等於其子節點的反正切之和：$1\cdot 50=7^2+1$，$5\cdot 13=8^2+1$，$25\cdot 130=57^2+1$。

驗算

- 以數值計算，最後那個恆等式的兩邊均為 0.1418970546…。
- 以分數作精確計算：對於 $\frac{1}{13},\frac{1}{21}$，$\tan(A+B)$ 為 $\frac{34}{272}=\frac{1}{8}$；對於 $\frac{1}{82},\frac{1}{187}$，其值為 $\frac{269}{15333}=\frac{1}{57}$；而對於 $\frac{1}{8},\frac{1}{57}$，其值為 $\frac{65}{455}=\frac{1}{7}$。
- 第一個恆等式的一個特殊情況：取 $a=1$、$b=1$、$c=2$，便得著名的 $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$。

常見錯誤

- 由 $\tan(A+B)=\frac{1}{a}$ 直接斷定 $A+B=\arctan\frac{1}{a}$，而沒有檢查 $A+B$ 是否位於 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 之內。
- 盲目地逐一嘗試 50、65 和 3250 的各種因數分解；其實由 13, 21 這一對倒推回去，一行便可求得 $a=8$。

STEP 之外

這類恆等式正是梅欽類公式（Machin-type formulae）背後的原理，例如 $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$；數百年來，人們一直用這些公式以人手計算 π，因為當 x 很小時，$\arctan x$ 的級數（series）收斂（converge）得很快。要看清這些恆等式，最簡潔的途徑是透過複數（complex numbers）：$\arctan\frac{1}{n}$ 是 $n+\mathrm{i}$ 的輻角（argument），所以反正切相加就對應於高斯整數（Gaussian integers）相乘，而條件 $bc = a^2+1$ 其實是 $a^2+1 = (a+\mathrm{i})(a-\mathrm{i})$ 的一個因式分解，只是換了個模樣。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 深入闡述了這種從幾何角度看乘法的觀點，而 Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 則討論了二平方和（sums of two squares）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。