詳細解答

STEP II 2005，第 3 題

純數學 • 分部積分法

STEP II 2005，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/05-s2-q3

關鍵思路

先求導：$\sin x - x\cos x$ 的導數（derivative）會化簡成一個正負號一目了然的式子，草圖和 y 的上下界便一併得出。兩個積分都是常規的分部積分法（integration by parts），平方項則借助二倍角公式（double-angle formulae）處理。最後的不等式來自兩者的比較：介乎 0 與 1 之間的數，不會小於它自己的平方。

解答

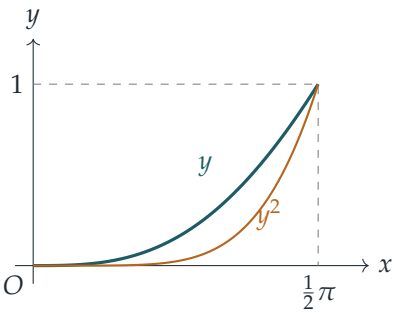
草圖與上下界

用積法則（product rule）求導，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos x - (\cos x - x\sin x) = x\sin x.$$

當 $0 < x \leq \frac{1}{2}\pi$ 時，x 和 $\sin x$ 均為正數，所以 y 在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上嚴格遞增（strictly increasing）。因此它的最小值是 $y(0) = 0 - 0 = 0$，最大值是 $y(\frac{1}{2}\pi) = 1 - \frac{1}{2}\pi \cdot 0 = 1$。故此 $0 \leq y \leq 1$，而且事實上當 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 時有 $0 < y < 1$。

至於曲線的形狀，在 $(0, \frac{1}{2}\pi]$ 上 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \sin x + x\cos x > 0$，所以整條曲線都向上彎。在原點處斜率（gradient）為 0。利用馬克勞林級數（Maclaurin series），$y = (x - \frac{1}{6}x^3) - x(1 - \frac{1}{2}x^2) + \cdots = \frac{1}{3}x^3 + \cdots$，所以曲線離開原點時非常平坦，形狀像三次曲線。在 $x = \frac{1}{2}\pi$ 處斜率為 $\frac{1}{2}\pi$。



圖中也畫出了琥珀色的曲線 y^2，因為它是最後一部分的關鍵。

第 (i) 部分

我們需要求 $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,\mathrm{d}x$。取 $u = x$、$\mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x$ 作分部積分，

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,\mathrm{d}x = \Big[x\sin x\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi - 1.$$

由於 $\int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x = 1$，

$$\int_0^{\pi/2} y\,\mathrm{d}x = 1 - (\tfrac{1}{2}\pi - 1) = 2 - \frac{\pi}{2},$$

正是所求。

第 (ii) 部分

展開，

$$y^2 = \sin^2 x - 2x\sin x\cos x + x^2\cos^2 x = \sin^2 x - x\sin 2x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x^2\cos 2x,$$

其中用到 $2\sin x\cos x = \sin 2x$ 和 $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$。我們逐一處理這四項。

第一，$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$，而 $\sin 2x$ 在上下限處均為零，所以

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \Big[\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

其次，取 $u = x$、$\mathrm{d}v = \sin 2x\,\mathrm{d}x$ 作分部積分，並利用 $\cos\pi = -1$，

$$\int_0^{\pi/2} x\sin 2x\,\mathrm{d}x = \Big[-\tfrac{1}{2}x\cos 2x\Big]_0^{\pi/2} + \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}.$$

第三，$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(\frac{1}{2}\pi)^3 = \dfrac{\pi^3}{48}$。

最後，取 $u = x^2$、$\mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x$ 作分部積分；邊界項 $[\frac{1}{2}x^2 \sin 2x]_0^{\pi/2}$ 為零，而餘下的積分正是剛才求得的那一個：

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \cos 2x\,\mathrm{d}x = 0 - \int_0^{\pi/2} x \sin 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4},$$

所以最後一項的貢獻是 $\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{8}\pi$。

把四項相加，

$$\int_0^{\pi/2} y^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8},$$

正是所求。

推論

想一想 兩個積分怎樣能夠得出一個關於 π 的不等式？

比較兩個被積函數(integrand)。由於 $0 \le y \le 1$，在整個區間上都有 $y - y^2 = y(1-y) \ge 0$。更進一步，我們已證明當 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 時 $0 < y < 1$，所以在該處 $y(1-y) > 0$。一個非負的連續函數（continuous function），若在某個開區間上嚴格為正，它的積分必定嚴格為正。因此

$$\int_0^{\pi/2} y^2\,\mathrm{d}x < \int_0^{\pi/2} y\,\mathrm{d}x, \qquad \text{即} \qquad \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8} < 2 - \frac{\pi}{2}.$$

兩邊乘以 48（它是正數，所以不等號方向不變），

$$\pi^3 - 6\pi < 96 - 24\pi, \qquad \text{所以} \qquad \pi^3 + 18\pi < 96.$$

這就是所要求的結果。

驗算

- 以數值計算，$2 - \frac{1}{2}\pi \approx 0.4292$，而 $\frac{1}{48}\pi^3 - \frac{1}{8}\pi \approx 0.2533$；對原來的被積函數使用辛普森法則（Simpson's rule），所得數值準確至小數點後十二位都相同。兩者都介乎 0 與 $\frac{1}{2}\pi \approx 1.571$ 之間，這是必然的，因為 $0 \le y \le 1$。
- 第二個積分比第一個小，正如圖中 y^2 位於 y 之下所顯示的那樣。
- 取 $\pi \approx 3.1416$，$\pi^3 + 18\pi \approx 31.006 + 56.549 = 87.55$，遠低於 96。

常見錯誤

- 在 $\int x \sin 2x\,\mathrm{d}x$ 中弄錯邊界項的正負號：在 $x = \frac{1}{2}\pi$ 處，$\cos 2x = \cos\pi = -1$，所以 $-\frac{1}{2}x\cos 2x$ 等於 $+\frac{1}{4}\pi$。

- 在最後一步只得出 $\leq$。要得到嚴格不等式，需要 $y(1-y) > 0$ 在某處成立，而不僅是 ≥ 0。
- 忘記說明為何 $y \leq 1$：只知道 $y(\frac{1}{2}\pi) = 1$ 並不足夠，還須用到 y 遞增這一事實。

STEP 之外

最後一步是一個重要想法的小小例子：函數之間的不等式，經積分後會變成數與數之間的不等式，而只要巧妙地選取函數，便可以把 π 這類常數困在某個範圍之內。同樣的策略可以由 $\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x > 0$ 得出 $\frac{22}{7} > \pi$ 這個著名的證明，而更有分量的例子，是尼雲（Niven）對 π 是無理數（irrational）的證明。在大學第一門分析課程中，你會嚴格地證明：一個非負的連續函數，若在某處為正，它的積分必為正。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是一本平易近人的書，可以看到這個證明怎樣嚴謹地完成。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。