詳細解答

STEP II 2005，第 12 題

概率與統計 • 貝葉斯定理

STEP II 2005，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/05-s2-q12

關鍵思路

這是以公平硬幣作為先驗（prior）的貝葉斯定理（Bayes' theorem）。由於硬幣是公平的，在已知回答的條件下，擲出正面的概率為 $\frac{1}{2}$，當且僅當無論硬幣擲出正面還是反面，得到這些回答的可能性都相等。因此在每一部分，我們只需比較兩個似然（likelihood）$\mathrm{P}(\text{回答} \mid H)$ 和 $\mathrm{P}(\text{回答} \mid T)$，並以哪一位孿生姊妹在線作為條件來計算它們。

解答

設 H 和 T 分別為硬幣擲出正面和反面的事件，故 $\mathrm{P}(H) = \mathrm{P}(T) = \frac{1}{2}$。設 A 為 Anna 在線的事件，B 為 Bella 在線的事件，其中 $\mathrm{P}(A) = p$，$\mathrm{P}(B) = q = 1 - p$。誰在線與硬幣毫無關係，所以 A 和 B 均與 H 獨立（independent）。在第 (ii) 和第 (iii) 部分，我們假設硬幣只擲一次，而兩封電郵都由同一位孿生姊妹回覆，即我們發信時在線的那一位。（另一種理解方式見文末的備註。）

記 $t = ap + bq$，即單獨一個回答屬實的整體概率。

對於任何一組回答紀錄 E，由貝葉斯定理及 $\mathrm{P}(H) = \mathrm{P}(T)$ 可得

$$\mathrm{P}(H \mid E) = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{P}(E \mid H)}{\frac{1}{2}\mathrm{P}(E \mid H) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(E \mid T)} = \frac{\mathrm{P}(E \mid H)}{\mathrm{P}(E \mid H) + \mathrm{P}(E \mid T)}.$$

此式等於 $\frac{1}{2}$，當且僅當 $\mathrm{P}(E \mid H) = \mathrm{P}(E \mid T)$。單憑這一點觀察，便已完成了大部分工作。

第 (i) 部分

設 Y 為回答是「是」的事件。若硬幣擲出正面，「是」便是真話。以誰在線作為條件，

$$\mathrm{P}(Y \mid H) = pa + qb = t.$$

若硬幣擲出反面，「是」便是謊話，故

$$\mathrm{P}(Y \mid T) = p(1-a) + q(1-b) = (p+q) - (ap+bq) = 1 - t.$$

因此

$$\mathrm{P}(H \mid Y) = \frac{t}{t + (1-t)} = t = ap + bq.$$

所以 $\mathrm{P}(H \mid Y) = \frac{1}{2}$ 當且僅當 $ap + bq = \frac{1}{2}$，亦即當且僅當 $2(ap+bq) = 1$，正如所求。

第 (ii) 部分

設 E 為先答「是」、後答「否」的事件。假設 Anna 在線。她的兩個回答互相獨立，而且無論硬幣擲出哪一面，兩個回答中都恰好有一個是真話：

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(E \mid H \cap A) &= a(1-a) && \text{（如實答「是」，然後說謊），} \\ \mathrm{P}(E \mid T \cap A) &= (1-a)a && \text{（說謊，然後如實答「否」）．} \end{aligned}$$

兩者相等。同理，$\mathrm{P}(E \mid H \cap B) = b(1-b) = \mathrm{P}(E \mid T \cap B)$。因此

$$\mathrm{P}(E \mid H) = pa(1-a) + qb(1-b) = \mathrm{P}(E \mid T),$$

再由上面的觀察可知 $\mathrm{P}(H \mid E) = \frac{1}{2}$，不論 p、a 和 b 取何值。

? **想一想** 為甚麼這裏完全不需要任何條件，就恰好得到 $\frac{1}{2}$？

回答互相矛盾，意味着無論硬幣擲出哪一面，這位孿生姊妹都是說了一次真話、說了一次謊話。這個組合在正面和反面的情況下出現的可能性相等，所以它不帶有任何關於硬幣的資訊，我們得到的仍然是先驗概率 $\frac{1}{2}$。

第 (iii) 部分

現在設 E 為兩次都答「是」的事件。已知擲出正面時，兩個回答都是真話；已知擲出反面時，兩個回答都是謊話。以誰在線作為條件，

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(E \mid H) &= pa^2 + qb^2, \\ \mathrm{P}(E \mid T) &= p(1-a)^2 + q(1-b)^2. \end{aligned}$$

兩式相減，並利用 $(1-a)^2 = 1-2a+a^2$，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E \mid H) - \mathrm{P}(E \mid T) &= p(a^2-(1-a)^2) + q(b^2-(1-b)^2)\\ &= p(2a-1)+q(2b-1)\\ &= 2(ap+bq)-(p+q)\\ &= 2(ap+bq)-1.\end{aligned}$$

所以若 $2(ap+bq)=1$，兩個似然便相等，而 $\mathrm{P}(H \mid E) = \frac{1}{2}$，正如所求。

（事實上，這個計算所顯示的不止於此：兩個似然之差恰好是 $2(ap+bq)-1$，所以 $\mathrm{P}(H \mid E) = \frac{1}{2}$ 成立當且僅當 $2(ap+bq)=1$，與第 (i) 部分的條件相同。）

備註：另一種理解方式

如果改為每封電郵都重新、獨立地決定是哪一位孿生姊妹剛好在線，那麼每個回答屬實的概率都是 t，而且互相獨立。這樣，在 (ii) 中 $\mathrm{P}(E \mid H) = t(1-t) = \mathrm{P}(E \mid T)$，而在 (iii) 中 $\mathrm{P}(E \mid H) = t^2$ 及 $\mathrm{P}(E \mid T) = (1-t)^2$，兩者在 $t = \frac{1}{2}$ 時相等。結論並無分別。

驗算

- 若兩位孿生姊妹永遠說真話（$a=b=1$），則 $t = 1 \neq \frac{1}{2}$，而在 (i) 中，一個「是」的回答令正面成為必然：$\mathrm{P}(H \mid Y) = t = 1$。這時 (ii) 中互相矛盾的回答不可能出現，這與 $a(1-a) = b(1-b) = 0$ 一致。
- 取 $p = 0.3$、$a = 0.8$ 及 $b = \frac{0.5-0.24}{0.7} \approx 0.371$（故 $2(ap+bq)=1$），在同一位孿生姊妹回覆的模型中模擬 2×10^5 輪，得出 $\mathrm{P}(H \mid \text{是、是}) \approx 0.496$。以分數對數千組隨機的 (p,a,b) 作精確枚舉，確認了全部三個結果在兩種理解方式下均成立。
- 若 $p = \frac{1}{2}$ 及 $a = b = 0.9$，條件不成立，而兩個「是」的回答給出 $\mathrm{P}(H \mid E) = \frac{81}{82}$，與 $\frac{1}{2}$ 相去甚遠，可見 (iii) 中的條件確實重要。

常見錯誤

- 未加說明便寫下 $\mathrm{P}(Y \mid T) = 1 - \mathrm{P}(Y \mid H)$。此式在這裏碰巧成立，但那只是因為在反面的情況下答「是」屬於說謊；作答時應說明這一點。
- 在 (iii) 中，把兩個回答當作各自以概率 t 屬實的獨立回答，同時卻又假設兩個回答出自同一位孿生姊妹。在已知是哪一位孿生姊妹的條件下，兩個回答是獨立的，但在無條件的情況下並不獨立，因為兩者都取決於誰在線。

STEP 之外

這裏貫穿始終的原理只有一個：後驗（posterior）賠率（odds）等於先驗賠率乘以似然比（likelihood ratio）；在兩個假設下出現的可能性相等的證據，不會告訴你任何事情。同一位孿生姊妹回覆的模型是一個簡單的混合模型（*mixture*）：在已知某個隱變量（hidden variable，即誰在線）的條件下，各個回答互相獨立，但整體而言卻是相依的，這個想法正是隱變量模型和貝葉斯模型的核心。Blitzstein 與 Hwang 合著的 *Introduction to Probability*（概率論入門）正是以這種精神，對條件概率和貝葉斯法則作了十分出色的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。