詳細解答

STEP II 2005，第 11 題

力學 • 斜面上的摩擦力

STEP II 2005，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

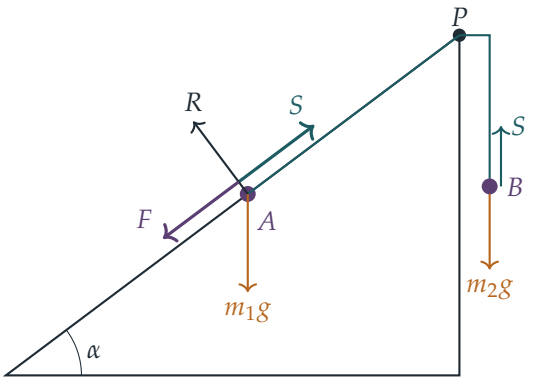
step.maths.org/questions/05-s2-q11

關鍵思路

由於 $\tan\alpha = \frac{3}{4}$，我們得到一個 3–4–5 三角形，所以 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ 及 $\cos\alpha = \frac{4}{5}$，而作用於 A 的每一個力都成為 $m_1 g$ 的簡潔倍數。A 的運動於是分成三個階段，每個階段的加速度（acceleration）都是常數：被繩子拉上斜面、自由地向上滑行，以及向下滑回。摩擦力（friction）的方向在最後兩個階段之間改變，而這正是本題暗藏玄機的地方。

解答

我們把 A 和 B 視為質點（particle），繩子視為輕而不可伸長（light and inextensible），滑輪（pulley）視為光滑，因此兩邊的張力（tension）S 相同。設 $\alpha = \arctan\frac{3}{4}$，使得 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ 及 $\cos\alpha = \frac{4}{5}$。



繩子拉緊時的加速度

在垂直於斜面的方向上，A 沒有加速度，所以

$R = m_1 g\cos\alpha = \frac{4}{5}m_1 g,$　　而極限摩擦力（limiting friction）為　　$\mu R = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}m_1 g = \frac{2}{5}m_1 g.$

首先我們檢查系統確實會運動。假如 B 下降，A 便會沿斜面向上移動，阻礙它的是其重量的分量 $\frac{3}{5}m_1 g$ 以及最多為 $\frac{2}{5}m_1 g$ 的摩擦力：合共最多為 $m_1 g$。向另一方拉動的是 B 的重量 $m_2 g$，而 $m_2 > m_1$，所以摩擦力無法令系統保持靜止：B 下降，A 沿斜面向上移動，而作用於 A 的摩擦力達到極限值，方向沿斜面向下。

設 a 為兩者共同的加速度。對 A（沿斜面向上）和對 B（向下）應用牛頓第二定律（Newton's second law），得

$$\begin{aligned} m_1 a &= S - \tfrac{3}{5}m_1 g - \tfrac{2}{5}m_1 g = S - m_1 g, \\ m_2 a &= m_2 g - S. \end{aligned}$$

兩式相加，$(m_1 + m_2)a = (m_2 - m_1)g$，所以

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\, g,$$

正如所求。為方便起見，我們寫成 $a = kg$，其中 $k = \dfrac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}$ 且 $0 < k < 1$。

到達最高點的時間

在時間 T，A 正以速率 $u = aT = kgT$ 沿斜面向上移動，並已走了 $\frac{1}{2}kgT^2$ 的距離。

繩子斷開時，S 消失。A 仍在沿斜面向上移動，所以摩擦力仍然沿斜面向下，而沿斜面向下的力合共為 $\frac{3}{5}m_1 g + \frac{2}{5}m_1 g = m_1 g$。因此 A 的減速度恰好是 g，並在再過一段時間

$$\frac{u}{g} = kT.$$

之後靜止下來。故此 A 在釋放後的時間

$$T + kT = (1+k)T = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\, T$$

到達最高點。（題目告訴我們 A 永遠不會到達滑輪，所以這個階段不會被提早中斷。）在這個階段中，A 再走了 $\dfrac{u^2}{2g} = \frac{1}{2}k^2 gT^2$，所以它由釋放點起沿斜面向上所走的總距離為

$$d = \tfrac{1}{2}kgT^2 + \tfrac{1}{2}k^2 gT^2 = \tfrac{1}{2}k(1+k)gT^2.$$

? **想一想**　A 停下來之後，會留在原處嗎？

只有當摩擦力足以支撐它時，它才會留在原處。重量沿斜面向下的分量是 $\frac{3}{5}m_1g$，而摩擦力最多只能提供 $\frac{2}{5}m_1g$。換句話說，$\tan\alpha = \frac{3}{4} > \frac{1}{2} = \mu$。所以 A 會向下滑回，而這時摩擦力沿斜面向上。沿斜面向下的淨力為 $\frac{3}{5}m_1g - \frac{2}{5}m_1g = \frac{1}{5}m_1g$，所以 A 以 $\frac{1}{5}g$ 的加速度沿斜面向下加速，比它上行時的減速度緩和得多。

質量之比

A 由最高點從靜止出發，需時 t_d 滑回距離 d 而返抵釋放點，其中

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{5}g\,t_d^2 = d = \tfrac{1}{2}k(1+k)gT^2, \qquad \text{所以} \qquad t_d^2 = 5k(1+k)T^2.$$

題目告訴我們 t_d 等於到達最高點的時間 $(1+k)T$。兩邊平方，這表示

$$(1+k)^2T^2 = 5k(1+k)T^2.$$

兩邊除以正數 $(1+k)T^2$，得 $1+k=5k$，所以 $k=\frac{1}{4}$。留意 T 已經消去：這就是為何無論繩子何時斷開，這個等式都成立，而它亦唯一地確定了 k 的值。於是

$$\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1} = \frac{1}{4} \iff 4m_2-4m_1 = m_2+m_1 \iff 3m_2 = 5m_1,$$

所以

$$m_1 : m_2 = 3:5.$$

驗算

- 極限情況：若 $m_2 \to m_1$，則 $k\to 0$，而到達最高點的時間趨向 T（幾乎沒有速率可以失去）；若 $m_2 \gg m_1$，則 $k\to 1$，而 A 靠慣性滑行的時間與它被拉動的時間一樣長，這正如我們所料，因為它達到速率 gT 後以 g 減速。
- 取 $m_1=3$、$m_2=5$ 及 $T=1\,\text{s}$，我們有 $k=\frac{1}{4}$；到達最高點的時間是 $1.25\,\text{s}$，$d=\frac{5}{32}g$，而下滑需時 $\sqrt{2d/(g/5)} = \sqrt{25/16} = 1.25\,\text{s}$。對全部三個階段逐步進行數值模擬，在多個 T 值之下，兩個時間都得出 $1.250\,\text{s}$。

常見錯誤

- 忘記了 A 開始滑回時摩擦力會反向，因而以 g（或 $\frac{3}{5}g$）而非 $\frac{1}{5}g$ 作為下滑的加速度。
- 只由繩子斷開的位置起計算下滑的距離，而不是由釋放點起計算。
- 沒有檢查 A 是否真的會滑回：這需要 $\tan\alpha > \mu$。

STEP 之外

摩擦力是取決於運動狀態的力的經典例子：它的方向隨速度而轉換，而當物體靜止時，它的大小有一個上限。這使得運動成為分段的，每個階段各有不同的運動方程(equation of motion)，而同一個想法亦支配着黏滑（stick–slip）現象，例如吱吱作響的門鉸和地震斷層。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）以大學一年級物理所要求的嚴謹程度，處理摩擦力和受約束的運動。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。