詳細解答

STEP II 2005，第 10 題

力學 • 相撞的拋體

STEP II 2005，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/05-s2-q10

關鍵思路

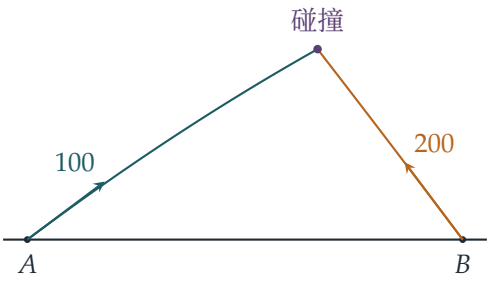
兩枚導彈都是拋體（projectile），所以我們可以寫出每一枚在任何時刻的位置。碰撞（collision）的意思是兩者在同一瞬間位置相同，由此得到兩條方程（水平和垂直方向各一），含兩個未知數：碰撞時間和 T。水平方向的方程是線性的，可以用來消去碰撞時間，垂直方向的方程隨之變成 T 的二次方程（quadratic）。之後我們要判斷哪一個根在物理上合理。

解答

建立模型

我們把兩枚導彈都視為質點（particle），只受重力作用而自由運動，不計空氣阻力。取 A 為原點，x 軸沿 AB 方向（所以 B 位於 $x = 180$），y 軸垂直向上。時間 t 以秒為單位，由第一枚導彈發射的一刻起計。

對第一枚導彈，由 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ 得 $\cos\alpha = \frac{4}{5}$，所以它的初速度分量是 $100 \cdot \frac{4}{5} = 80$ 和 $100 \cdot \frac{3}{5} = 60$。對第二枚導彈，由 $\sin\beta = \frac{4}{5}$ 得 $\cos\beta = \frac{3}{5}$。它朝着 A 飛行，所以它的分量是 $-200 \cdot \frac{3}{5} = -120$ 和 $200 \cdot \frac{4}{5} = 160$。



設 $s = t - T$ 為第二枚導彈發射後所經過的時間。那麼，當兩者都在飛行時，

$$\begin{aligned} &\text{第一枚導彈：} \quad x = 80t, && y = 60t - 5t^2, \\ &\text{第二枚導彈：} \quad x = 180 - 120s, && y = 160s - 5s^2. \end{aligned}$$

碰撞

碰撞時兩者的 x 坐標相同：

$$80t = 180 - 120(t - T) \quad \Longrightarrow \quad 200t = 180 + 120T \quad \Longrightarrow \quad t = 0.9 + 0.6T,$$

因此 $s = t - T = 0.9 - 0.4T$。

y 坐標亦相同：$60t - 5t^2 = 160s - 5s^2$，即

$$60t - 160s = 5(t^2 - s^2) = 5(t - s)(t + s) = 5T(t + s),$$

這裏用了 $t - s = T$。代入 t 和 s 的表達式：

$$\begin{aligned} 60t - 160s &= 60(0.9 + 0.6T) - 160(0.9 - 0.4T) = 100T - 90, \\ 5T(t + s) &= 5T(1.8 + 0.2T) = 9T + T^2. \end{aligned}$$

令兩式相等，

$$T^2 - 91T + 90 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (T - 1)(T - 90) = 0,$$

所以 $T = 1$ 或 $T = 90$。

想一想 兩個根都滿足方程。為甚麼 $T = 90$ 不可能是答案？

當 $T = 90$ 時，我們得到 $s = 0.9 - 36 = -35.1$，即是說這次「碰撞」會在第二枚導彈發射之前 35.1 秒發生。（碰撞點亦遠低於地面：這些方程所描述的，是延伸至實際飛行範圍以外的拋物線。）所以這個根沒有物理意義。況且第一枚導彈只在空中停留 $2 \cdot 60/10 = 12$ 秒，早就已經落地了。

當 $T = 1$ 時，我們得到 $t = 1.5$ 和 $s = 0.5 > 0$，所以兩枚導彈都在飛行中。高度分別是 $60(1.5) - 5(1.5)^2 = 78.75$ 和 $160(0.5) - 5(0.5)^2 = 78.75$，兩者皆為正數，而且兩枚導彈

都位於 $x = 120$。因此

$$T = 1 \text{ 秒}.$$

驗算

把 $T = 1$ 代回去：在 $t = 1.5\,\text{s}$ 時，兩枚導彈都位於 $(120, 78.75)$ 米，這一點我們已用精確分數核實。以發射延遲 $1\,\text{s}$ 用數值方法逐步計算兩者的運動，兩枚導彈之間的距離在 $t = 1.5\,\text{s}$ 時降至幾乎為零。再作一個合理性檢查：碰撞發生在 $x = 120$，介乎 A 與 B 之間，而第一枚導彈仍在上升，因為它在該處的垂直速度是 $60 - 15 = 45\,\text{m s}^{-1}$。

常見錯誤

- 兩枚導彈用了同一個時間變量。第二枚導彈的飛行時間是 $t - T$，而不是 t。
- 忘記第二枚導彈是沿 x 軸的負方向運動。
- 保留 $T = 90$，而沒有檢查是否 $t - T > 0$。

STEP 之外

這個問題有一個更巧妙的看法。兩枚導彈的加速度同為 g，所以一旦兩者都在飛行，它們的相對速度（relative velocity）便是常數，各自看到對方沿直線運動。碰撞發生的充要條件，是這個相對速度的方向正好沿着時刻 T 時連接兩者的直線，把這個條件寫出來便得到同一條二次方程。像這樣轉換到自由下落的參考系（frame），正是通往愛因斯坦（Einstein）等效原理（equivalence principle）的第一步。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對相對運動和非慣性參考系（non-inertial frame）有嚴謹的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。