詳細解答

STEP II 2005，第 1 題

純數學 • 多項式與駐點

> **STEP II 2005，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/05-s2-q1

關鍵思路

用積法則（product rule）對任何形如 $P(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ 的式子求導，會得到 $(P'(x) - 2xP(x))\mathrm{e}^{-x^2}$；由於 e^{-x^2} 永不為零，駐點（stationary point）正好就是多項式（polynomial）$P'(x) - 2xP(x)$ 的實根。於是第二部分變成一個逆向問題：先決定我們希望 $P' - 2xP$ 是哪一個多項式，然後透過比較係數（comparing coefficients）倒推出 P。

解答

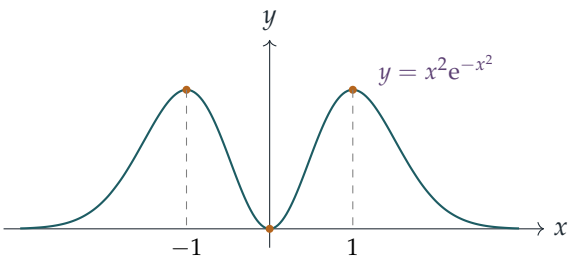
第一部分

由積法則，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\mathrm{e}^{-x^2}\right) = 2x\,\mathrm{e}^{-x^2} + x^2\cdot(-2x)\,\mathrm{e}^{-x^2} = 2x(1-x^2)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

由於對所有 x 都有 $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$，上式為零當且僅當 $x(1-x^2) = 0$，即

$$x = 0, \qquad x = 1, \qquad x = -1.$$



圖像在原點有一個極小點，並在 $x = \pm 1$ 處有高度為 e^{-1} 的極大點。

第二部分

對任何多項式 P，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\mathrm{e}^{-x^2}\right) = \left(P'(x) - 2xP(x)\right)\mathrm{e}^{-x^2},$$

所以，同樣因為 $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$，導數（derivative）為零之處正好就是 $P'(x) - 2xP(x) = 0$ 之處。第一部分正符合這個模式：$P(x) = x^2$ 給出 $P' - 2xP = -2x(x^2 - 1)$。因此我們的目標是

$$P'(x) - 2xP(x) = -2x\left(x^2 - a^2\right)\left(x^2 - b^2\right), \qquad (*)$$

它的實根只有 0、$\pm a$ 和 $\pm b$。這是五個相異的值，因為 a 和 b 是相異的正數。

> **想一想** P 的次數應該是多少？為甚麼它應該只含偶數次冪？

若 P 的次數為 n，首項係數（leading coefficient）為 c，則 P' 的次數為 $n-1$，所以 $P' - 2xP$ 的次數為 $n+1$，首項係數為 $-2c$。$(*)$ 的右方次數為 5，首項係數為 -2，所以我們需要 $n = 4$ 和 $c = 1$。此外，右方是一個奇函數（odd function）；若 P 是偶函數（even function），則 P' 和 $2xP$ 都是奇函數，所以很自然會嘗試

$$P(x) = x^4 + \beta x^2 + \gamma.$$

於是 $P'(x) = 4x^3 + 2\beta x$，而

$$\begin{aligned} P'(x) - 2xP(x) &= 4x^3 + 2\beta x - 2x^5 - 2\beta x^3 - 2\gamma x \\ &= -2x^5 + (4 - 2\beta)x^3 + (2\beta - 2\gamma)x, \end{aligned}$$

另一方面，$(*)$ 的右方展開後是

$$-2x^5 + 2\left(a^2 + b^2\right)x^3 - 2a^2b^2x.$$

比較 x^3 和 x 的係數：

$$\begin{aligned} 4 - 2\beta = 2\left(a^2 + b^2\right) \qquad &\Longrightarrow \quad \beta = 2 - a^2 - b^2, \\ 2\beta - 2\gamma = -2a^2b^2 \qquad &\Longrightarrow \quad \gamma = \beta + a^2b^2 = a^2b^2 - a^2 - b^2 + 2. \end{aligned}$$

所以其中一個合適的多項式是

$$\boxed{P(x) = x^4 + \left(2 - a^2 - b^2\right)x^2 + a^2b^2 - a^2 - b^2 + 2.}$$

這樣選取後，$(*)$ 恆成立，所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\mathrm{e}^{-x^2}\right) = -2x\left(x^2 - a^2\right)\left(x^2 - b^2\right)\mathrm{e}^{-x^2},$$

它在 $x = 0$、$x = \pm a$ 和 $x = \pm b$ 時為零，而且由於 $\mathrm{e}^{-x^2} \neq 0$，在其他 x 值都不為零。P 的任何非零常數倍同樣可行。

驗算

- 取 $a=1$、$b=2$：這時 $P(x)=x^4-3x^2+1$，而 $P'-2xP=4x^3-6x-2x^5+6x^3-2x=-2x^5+10x^3-8x=-2x(x^2-1)(x^2-4)$，符合要求。
- 數值上，當 $a=0.7$、$b=1.9$ 時，$P(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ 的導數在 $[-5,5]$ 上只在 $x=0,\pm0.7,\pm1.9$ 附近變號；這條公式亦已用數千組隨機的 (a,b,x) 驗證過。
- 粗略地令 $b\to 0$：$P\to x^4+(2-a^2)x^2+2-a^2$，導數變成 $-2x^3(x^2-a^2)\mathrm{e}^{-x^2}$，位於 0 和 $\pm b$ 的根合而為一。

常見錯誤

- 漏掉鏈式法則（chain rule）帶來的因子：e^{-x^2} 的導數是 $-2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$，而不是 e^{-x^2}。
- 為了配合五個根而猜 P 的次數是 5：對 $P\mathrm{e}^{-x^2}$ 求導會令次數增加一，所以 P 的次數是 4。
- 沒有說明為何沒有其他駐點：這需要用到 $\mathrm{e}^{-x^2}\neq 0$，以及該五次多項式只有這些根這個事實。

STEP 之外

映射 $P\mapsto P'-2xP$ 是多項式上的一個線性算子（linear operator），而解 $(*)$ 就是解一條一階線性微分方程（first-order linear differential equation），其積分因子（integrating factor）為 e^{-x^2}。形如 $H(x)\mathrm{e}^{-x^2}$（其中 H 為多項式）的函數引出埃爾米特多項式（Hermite polynomials），它們出現於概率（正態分佈，normal distribution）和量子諧振子（quantum harmonic oscillator）之中。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科書）涵蓋積分因子和埃爾米特方程（Hermite's equation）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。