詳細解答

STEP I 2005，第 9 題

力學 • 剛體平衡

> **STEP I 2005，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q9

關鍵思路

整道題的關鍵在於一個未知量：這根非均勻桿的質心（centre of mass）G 位於何處。頭兩個裝置各自給出以該位置表示的 T，把兩者等同起來，便可同時定出 G 和 T。之後，傾斜的裝置就是一道標準的剛體（rigid body）問題：先對未知接觸力所作用的那一點取力矩（moments），然後分解（resolve）各力。

解答

我們把桿看作剛體，其全部重量 W 作用於質心 G，並把繩看作輕而不可伸長（light and inextensible）。設 $AG = x$，則 $GB = 3l - x$。

求 G 的位置並證明 $5T = 2W$

兩端各繫一繩。對 B 取力矩，可消去 B 處未知的張力（tension）：

$$T \cdot 3l = W(3l - x).$$

支點距離 A 爲 l，繩繫於 B。設 P 為支點（pivot），則 $PB = 2l$。對 P 取力矩，可消去未知的支點反作用力。B 處的繩要把桿拉住，G 必須位於 P 靠 B 的一側，故 $PG = x - l$，而

$$T \cdot 2l = W(x - l).$$

消去 T（把第一條方程乘以 2，第二條乘以 3，然後比較）：

$$2W(3l - x) = 3W(x - l) \quad \Longrightarrow \quad 9l = 5x \quad \Longrightarrow \quad x = \tfrac{9}{5}l.$$

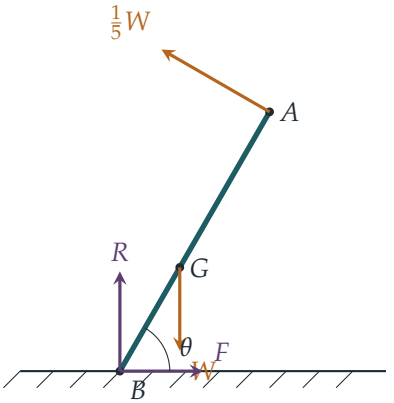
於是由第二條方程得 $2lT = W \cdot \frac{4}{5}l$，故 $T = \frac{2}{5}W$，即

$$5T = 2W,$$

正如所求。留意 $x = \frac{9}{5}l > l$，這與我們假設 G 在支點之外是一致的。因此 G 與 B 的距離為 $GB = 3l - \frac{9}{5}l = \frac{6}{5}l$。

桿擱在地面上

現在 B 在粗糙的地面上，桿與水平成 θ 角，而 A 處的繩垂直於桿，張力為 $\frac{1}{2}T = \frac{1}{5}W$。在 B 處有向上的法向反作用力（normal reaction）R 和沿地面的摩擦力（friction）F。



對 B 取力矩。這樣可消去 R 和 F。繩的拉力垂直於桿，作用點與 B 相距 $3l$，故其力矩為 $\frac{1}{5}W \cdot 3l$。重量沿桿相距 $\frac{6}{5}l$ 之處鉛垂作用，故其作用線與 B 的垂直距離為 $\frac{6}{5}l\cos\theta$。因此

$$\tfrac{1}{5}W \cdot 3l = W \cdot \tfrac{6}{5}l\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad \cos\theta = \tfrac{1}{2},$$

所以 $\theta = 60°$（即 $\frac{\pi}{3}$）。

想一想 繩的張力的各個分量指向哪一方？

桿與水平成 θ 角，而繩與桿成直角，所以繩與鉛垂線成 θ 角。因此其張力 $\frac{1}{5}W$ 的鉛垂分量為 $\frac{1}{5}W\cos\theta$（向上），水平分量為 $\frac{1}{5}W\sin\theta$，指向越過 B 的後方，即背離 A 所在的一側。摩擦力必須抵銷這個水平拉力，所以它在 B 處指向 A 所在的一側，如圖所示。

沿鉛垂方向分解：

$$R + \tfrac{1}{5}W\cos 60° = W \quad\Longrightarrow\quad R = W - \tfrac{1}{10}W = \tfrac{9}{10}W.$$

沿水平方向分解：

$$F = \tfrac{1}{5}W\sin 60° = \tfrac{\sqrt{3}}{10}W.$$

只要 $F \le \mu R$，桿便不會滑動，即

$$\mu \ge \frac{F}{R} = \frac{\sqrt{3}/10}{9/10} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

所以能防止滑動的最小摩擦系數（coefficient of friction）為 $\mu = \dfrac{\sqrt{3}}{9} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}} \approx 0.192$（等號成立時，桿處於極限平衡（limiting equilibrium））。

驗算

- 取 $x = \frac{9}{5}l$，雙繩裝置給出 $T = W \cdot \frac{6/5}{3} = \frac{2}{5}W$，而支點裝置給出 $T = W \cdot \frac{4/5}{2} = \frac{2}{5}W$：兩者相同，理應如此。
- 在傾斜的位置，再對 A 取力矩（取 $W = l = 1$，$\theta = 60°$，$R = 0.9$，$F \approx 0.1732$），所得的合力矩同樣為零，這一併驗證了 R 和 F。
- 數值上 $\mu_{\min} = \sqrt{3}/9 \approx 0.19245$，這已由電腦建立各力的向量並檢查全部三條平衡方程加以確認。

常見錯誤

- 以 $\frac{6}{5}l\sin\theta$ 作為重量的力臂。由 B 至重量作用線的水平距離是 $\frac{6}{5}l\cos\theta$。
- 忘記垂直於桿的繩有鉛垂分量，而取 $R = W$。這樣會得出 $\mu = \sqrt{3}/10$，數值偏小。
- 假設桿是均勻的，以為 G 在中點。第一部分的全部目的正是要找出 G 的位置。

STEP 之外

利用平衡時的量度來確定質心的位置，是一個強大想法的靜力學版本：一個力系對某一點的力矩決定了該力系，只差一個合力。到了大學，這會發展成剛體靜力學以至動力學的研究，其中質心和轉動慣量（moment of inertia）就是支配物體運動的兩個數。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics* 講述力矩（torque）與剛體，並附有大量這類風格而難度更高的題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。