詳細解答

STEP I 2005，第 8 題

純數學 • 一階微分方程

> **STEP I 2005，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q8

關鍵思路

開頭的恆等式(identity)其實是一道配方，教我們辨認形如 $2xy\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ky^2 + (\text{只含}x\text{ 的式子})$ 的方程。方程一旦寫成這個形狀，代換（substitution）$y^2 = x^k f(x)$ 便會把 y^2 項消去，剩下 $f'(x)$ 等於一個 x 的函數，直接積分即可。真正要花工夫的，只有選取 k，以及在第 (ii) 部分把方程兩邊同除，使左邊變成 $2xy\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

解答

恆等式

把 $y^2 = x^k f(x)$ 對 x 作隱函數求導（implicit differentiation），右邊用積法則（product rule）：

$$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = kx^{k-1}f(x) + x^k\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}.$$

兩邊乘以 x，

$$2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = k\,x^k f(x) + x^{k+1}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = ky^2 + x^{k+1}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},$$

因為 $x^k f(x) = y^2$。這就是所求的結果。

第 (i) 部分

取 $k = 1$，寫成 $y^2 = xf(x)$，恆等式便給出 $2xy\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 + x^2 f'(x)$。與題目給出的方程比較，$y^2$ 項互相吻合，所以方程成立當且僅當

$$x^2 f'(x) = x^2 - 1, \qquad \text{即} \qquad f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0).$$

積分得 $f(x) = x + \dfrac{1}{x} + c$，所以

$$y^2 = xf(x) = x^2 + cx + 1.$$

由條件「當 $x = 1$ 時 $y = 2$」得 $4 = 1 + c + 1$，所以 $c = 2$，而

$$y^2 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2.$$

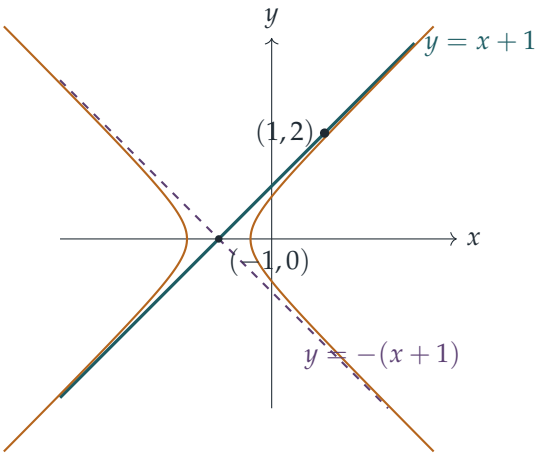
因此 $y = x + 1$ 或 $y = -(x+1)$；只有 $y = x + 1$ 通過 $(1, 2)$，所以解是

$$y = x + 1.$$

（代回原式：$2x(x+1) \cdot 1 = 2x^2 + 2x$，而 $(x+1)^2 + x^2 - 1 = 2x^2 + 2x$，所以它對每一個 x 都滿足方程，包括我們曾經用來作除數的 $x = 0$。）

想一想 答案只不過是 $y = x + 1$，那麼「從幾何角度描述」究竟想我們寫甚麼？

解曲線是一條直線：它的斜率（gradient）為 1，通過 $(-1, 0)$ 和 $(0, 1)$，與 x-axis 所在的橫軸成 45° 角。值得一提的是，這個結果其實有點出人意表。通解（general solution）$y^2 - x^2 - cx = 1$ 是一族圓錐曲線（conics）；配方（completing the square）後得 $y^2 - (x + \frac{c}{2})^2 = 1 - \frac{c^2}{4}$，這是一條等軸雙曲線（rectangular hyperbola），中心在 $(-\frac{c}{2}, 0)$，漸近線（asymptotes）為 $y = \pm(x + \frac{c}{2})$。初始條件（initial condition）選出了 $c = 2$，這正是右邊等於零的情況，雙曲線退化（degenerate）成它自己的一對漸近線 $y = \pm(x+1)$。我們的解就是這對直線中的 $y = x + 1$ 那一支。



實線是所求的解；虛線是 $y^2 = (x+1)^2$ 的另一半。琥珀色的曲線勾畫出這族曲線中非退化成員的形狀：一條等軸雙曲線，以類似這樣的一對直線為漸近線，並逐漸向它們靠近。

第 (ii) 部分

要使用恆等式，左邊必須是 $2xy\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，所以把方程除以 x（$\ln x$ 項已限定 $x>0$，所以這一步並無問題）：

$$2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y^2 + \frac{2\ln x}{x}.$$

y^2 的係數是 -1，所以取 $k=-1$，即 $y^2 = f(x)/x$。這時 $x^{k+1} = x^0 = 1$，恆等式變成 $2xy\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y^2 + f'(x)$。比較兩式，

$$f'(x) = \frac{2\ln x}{x}.$$

由於 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x)^2 = \frac{2\ln x}{x}$，我們得到 $f(x) = (\ln x)^2 + c$，於是

$$y^2 = \frac{(\ln x)^2 + c}{x}.$$

當 $x=1$ 時 $y = 1 \div 1 = (0+c)/1$，所以 $c=1$。這裏取正平方根，因為在 $x=1$ 處 $y=1>0$，而且 y 永不為零（分子 $1+(\ln x)^2$ 最少是 1），所以解是

$$y = \sqrt{\frac{1+(\ln x)^2}{x}}, \qquad x>0.$$

驗算

- 在 (i) 中，直線 $y=x+1$ 可以如上文般直接代入方程驗證；由 $(1,2)$ 出發對方程作數值積分（龍格－庫塔法，Runge–Kutta），在 $x=2$ 得 $y=3.000$，在 $x=5$ 得 $y=6.000$。
- 在 (ii) 中，$y^2 = (1+(\ln x)^2)/x$ 給出 $y(3)\approx 0.8577$ 和 $y(0.2)\approx 4.2369$；由 $(1,1)$ 出發對微分方程作數值積分，結果在小數點後多個位都吻合。
- 恆等式本身：試取 $k=0$，它便簡化成 $2xy\,y' = xf'$，這只不過是 $(y^2)' = f'$ 乘以 x。

常見錯誤

- 在 (ii) 中出於習慣而用了 $k=1$。除以 x 之後，y^2 項的正負號才是決定 $k=-1$ 的關鍵。
- 在 (ii) 中忘記除以 x，結果嘗試拿 $2x^2y\,y'$ 去配對恆等式。
- 把 (i) 的答案停留在 $y^2=(x+1)^2$，沒有選出通過 $(1,2)$ 的那一支。

STEP 之外

這裏的代換其實是一個標準技巧的變裝版本：設 $u = y^2$，便把 $2xy\,y' = ky^2 + g(x)$ 化成線性（linear）方程 $xu' - ku = g(x)$，而 x^{-k} 就是它的積分因子（integrating factor）。經冪代換後變成線性的方程稱為伯努利方程（Bernoulli equations），是大學常微分方程（ODE）課程中最早遇到的非線性方程之一。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（一本常微分方程入門教科書）把它們與積分因子和恰當方程（exact equations）放在一起討論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。