詳細解答

STEP I 2005，第 7 題

純數學 • 裂項相消乘積

> **STEP I 2005，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q7

關鍵思路

三個乘積全部都可以裂項相消（telescope）：把每個因子寫成比 $g(r+1)/g(r)$ 的形式，或寫成若干個這類比的乘積，幾乎所有項便會互相約去，只剩下首尾兩個值。第 (i) 及第 (ii) 部分是熱身，用來展示這個機制。第 (iii) 部分的工夫，在於看出那個三角因子其實暗地裏正是這樣的一個比。以 $\sin\frac{(2r-1)\pi}{n}$ 為公分母通分後，分子就變成一個複角（compound angle）的正弦。

解答

第 (i) 部分

把乘積逐項寫出，

$$\prod_{r=1}^{n}\frac{r+1}{r}=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}.$$

每個分子都與下一個因子的分母約去，所以只剩下最後一個分子和第一個分母：

$$\prod_{r=1}^{n}\frac{r+1}{r}=\frac{n+1}{1}=n+1.$$

第 (ii) 部分

把分子因式分解（factorise），$r^2-1=(r-1)(r+1)$，並把每個因子拆成兩個：

$$\frac{r^2-1}{r^2}=\frac{r-1}{r}\times\frac{r+1}{r}.$$

由於乘積的乘積就是各因子的乘積，我們可以把這兩組因子分開處理（這裏 $n \geq 2$）：

$$\prod_{r=2}^{n} \frac{r-1}{r} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n},$$

$$\prod_{r=2}^{n} \frac{r+1}{r} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

兩者都與第 (i) 部分一模一樣地裂項相消。相乘得

$$\prod_{r=2}^{n} \frac{r^2-1}{r^2} = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

第 (iii) 部分

設 $\alpha = \dfrac{2\pi}{n}$ 及 $\beta_r = \dfrac{(2r-1)\pi}{n}$，則第 r 個因子為 $\cos\alpha + \sin\alpha \cot\beta_r$。

> ? **想一想** $\cos\alpha + \sin\alpha \cot\beta$ 怎樣才能寫成兩個相似的量之比？

利用 $\cot\beta = \cos\beta / \sin\beta$ 並通分。這時分子正是一個複角的展開式：

$$\cos\alpha + \sin\alpha \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}.$$

這一步需要 $\sin\beta_r \neq 0$，而「n 是偶數」這個條件正是在這裏用上。只有當 $(2r-1)/n$ 是整數時，才會有 $\sin\beta_r = 0$。但 $2r-1$ 是奇數而 n 是偶數，奇數不可能是 n 的倍數。因此每個因子都有定義，而下文的每個分母都不為零。

現在 $\alpha + \beta_r = \dfrac{2\pi + (2r-1)\pi}{n} = \dfrac{(2r+1)\pi}{n} = \beta_{r+1}$，所以

$$\cos\alpha + \sin\alpha \cot\beta_r = \frac{\sin\beta_{r+1}}{\sin\beta_r}.$$

這正好是第 (i) 部分的形式，其中 $g(r) = \sin\beta_r$。乘積裂項相消：

$$\prod_{r=1}^{n} \frac{\sin\beta_{r+1}}{\sin\beta_r} = \frac{\sin\beta_2}{\sin\beta_1} \times \frac{\sin\beta_3}{\sin\beta_2} \times \cdots \times \frac{\sin\beta_{n+1}}{\sin\beta_n}$$

$$= \frac{\sin\beta_{n+1}}{\sin\beta_1} = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{n}\right)}{\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{n}\right)}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

由於 sin 的周期（period）為 2π，分子等於分母，故

$$\prod_{r=1}^{n} \left(\cos\tfrac{2\pi}{n} + \sin\tfrac{2\pi}{n} \cot\tfrac{(2r-1)\pi}{n}\right) = 1.$$

驗算

▶ 第 (i) 部分，取 $n = 3$：$2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 4 = n+1$。

- 第 (ii) 部分，取 $n = 2$：唯一的因子是 $\frac{3}{4}$，而 $\frac{n+1}{2n} = \frac{3}{4}$。當 $n \to \infty$ 時，乘積趨向 $\frac{1}{2}$，這是一個著名的無窮乘積（infinite product）。
- 第 (iii) 部分，取 $n = 4$：$\cos\frac{\pi}{2} = 0$ 及 $\sin\frac{\pi}{2} = 1$，所以各因子為 $\cot\frac{\pi}{4}$、$\cot\frac{3\pi}{4}$、$\cot\frac{5\pi}{4}$ 和 $\cot\frac{7\pi}{4}$，即 1、-1、1 和 -1，乘積為 1。我們亦以數值計算驗證過，對 60 以內的每個偶數 n，乘積都等於 1（誤差在 10^{-8} 以內）。
- 若 n 是奇數，$r = \frac{n+1}{2}$ 的那個因子涉及 $\cot\pi$，而它沒有定義。這就解釋了題目為何要有這個條件。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分，由 $r = 1$ 開始相消：下限是 2，所以最先的兩個因子是 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{3}{2}$。
- 在第 (iii) 部分，停在 $\sin\frac{(2n+1)\pi}{n} / \sin\frac{\pi}{n}$ 就算，沒有利用周期性把它化簡為 1。
- 沒有解釋「n 是偶數」用在哪裏。正是這個條件，令每個餘切（cotangent）以及每個分母都有妥善的定義。

STEP 之外

乘積的裂項相消，與你在部分分式（partial fractions）中遇到的裂項求和，是乘法與加法上的一對近親。取對數（logarithm）就能把其中一個變成另一個。第 (ii) 部分是無窮乘積 $\prod_{r\geq 2}(1 - 1/r^2) = \frac{1}{2}$ 的有限版本。像這樣的無窮乘積，以及歐拉（Euler）乘積

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{r\geq 1}\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right),$$

要到大學第一門分析（analysis）課程才會嚴謹地研究；在那裏，乘積的收斂（convergence）是透過對數之和的收斂來定義的。Abbott 的 *Understanding Analysis* 是建立所需收斂概念的好起點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。