詳細解答

STEP I 2005，第 6 題

純數學 • 阿波羅尼奧斯圓

> **STEP I 2005，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q6

關鍵思路

像 $AP = 2BP$ 這樣的條件含有平方根，所以先把它平方：距離的平方是多項式（polynomial），而且兩邊 $x^2 + y^2$ 項的係數（coefficient）相同，這正是軌跡為圓的原因。在第 (ii) 部分，我們對 x-axis 上任意一對點作同樣的處理；而兩條形如 $x^2 + y^2 + px + q = 0$ 的方程描述同一個圓，當且僅當兩者的 p 和 q 分別相同。比較係數（comparing coefficients）可得 k^2 的兩個表達式，再消去 k 便得出兩個結果。

解答

第 (i) 部分

兩個長度都是非負的，所以 $AP = 2BP$ 等價於 $AP^2 = 4BP^2$：

$$(x-5)^2 + (y-16)^2 = 4[(x+4)^2 + (y-4)^2].$$

展開得

$$x^2 - 10x + y^2 - 32y + 281 = 4x^2 + 32x + 4y^2 - 32y + 128.$$

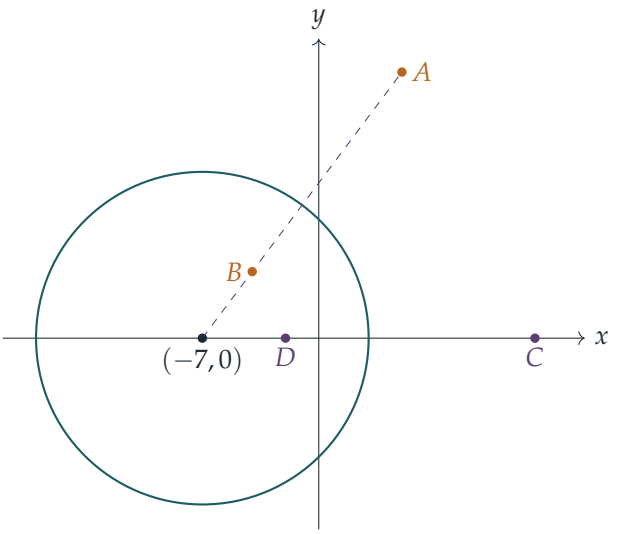
含 y 的一次項互相抵消，把所有項移到右邊，得

$$3x^2 + 42x + 3y^2 - 153 = 0, \qquad \text{即} \qquad x^2 + 14x + y^2 - 51 = 0.$$

配方（completing the square），$x^2 + 14x = (x+7)^2 - 49$，所以

$$(x+7)^2 + y^2 = 100,$$

這正是所要證明的。軌跡是圓心為 $(-7, 0)$、半徑為 10 的圓。



（點 $C = (13, 0)$ 和 $D = (-2, 0)$ 是第 (ii) 部分其中一對可能的點，此時 $k = 2$。留意 A、B 與圓心同樣共線（collinear）。）

第 (ii) 部分

與之前一樣，$QC = kQD$ 等價於 $QC^2 = k^2QD^2$。設 $Q = (x, y)$，則

$$(x-a)^2 + y^2 = k^2[(x-b)^2 + y^2].$$

把各項移到右邊並整理，

$$(k^2-1)(x^2+y^2) - 2(k^2b - a)x + (k^2b^2 - a^2) = 0.$$

由於 $k > 1$，我們有 $k^2 - 1 \neq 0$，故可以除以它：

$$x^2 + y^2 - \frac{2(k^2b-a)}{k^2-1}\,x + \frac{k^2b^2 - a^2}{k^2-1} = 0.$$

想一想 為甚麼我們可以與 $x^2 + 14x + y^2 - 51 = 0$ 比較係數？

方程 $x^2 + y^2 + px + q = 0$ 可以改寫成 $(x + \frac{1}{2}p)^2 + y^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$。如果它是圓心為 $(-7, 0)$、半徑為 10 的圓，那麼圓心迫使 $p = 14$，半徑迫使 $\frac{1}{4}p^2 - q = 100$，所以 $q = -51$。一個圓只有一個圓心和一個半徑，所以兩條方程必須有相同的 p 和相同的 q。

比較 x 的係數：

$$\frac{k^2b - a}{k^2 - 1} = -7 \implies k^2b - a = -7k^2 + 7 \implies k^2(b+7) = a + 7.$$

比較常數項：

$$\frac{k^2b^2-a^2}{k^2-1}=-51 \implies k^2b^2-a^2=-51k^2+51 \implies k^2(b^2+51)=a^2+51.$$

現在 $b^2+51>0$，而且 $b+7\neq 0$：假如 $b=-7$，第一條方程便會給出 $a=-7=b$，而這是題目排除了的情況。因此我們可以分別除以這兩個量，得到 k^2 的兩個表達式：

$$\frac{a+7}{b+7}=k^2=\frac{a^2+51}{b^2+51},$$

這就是第一個結果。

至於第二個結果，交叉相乘：

$$(a+7)(b^2+51)=(b+7)(a^2+51).$$

展開後，常數 357 在兩邊互相抵消，餘下

$$ab^2+51a+7b^2=a^2b+51b+7a^2.$$

把各項分組，使每一組都出現 $a-b$：

$$\begin{aligned}0&=(a^2b-ab^2)-51(a-b)+7(a^2-b^2)\\&=(a-b)[ab-51+7(a+b)].\end{aligned}$$

由於 $a\neq b$，我們可以除以 $a-b$，所以

$$ab+7a+7b=51, \quad \text{所以} \quad ab+7a+7b+49=100, \quad \text{即} \quad (a+7)(b+7)=100,$$

這正是所要證明的。

驗算

- 試取 $b=-2$：這時 $b+7=5$，所以 $a+7=20$，$a=13$，得出 $k^2=20/5=4$。點 $(3,0)$ 在圓上，而 $QC=10=2\times 5=2\,QD$。點 $(-17,0)$ 也在圓上，此時 $QC=30=2\times 15$。
- 在第 (i) 部分，點 $(3,0)$ 給出 $AP=\sqrt{4+256}=\sqrt{260}$ 和 $BP=\sqrt{49+16}=\sqrt{65}$，而確實有 $\sqrt{260}=2\sqrt{65}$。
- 我們亦以數值方法驗證過：對於許多滿足 $(a+7)(b+7)=100$ 的點對，圓上隨機選取的點都滿足 $QC=kQD$；而且每一對滿足第一個結果且 $a\neq b$ 的數，也都滿足第二個結果。

常見錯誤

- 未除以 $k^2 - 1$ 便比較係數：兩條方程只需相差一個整體的常數倍便已描述同一個圓。
- 除以 $b + 7$ 之前沒有檢查它是否非零。
- 遺漏因子 $a - b$：它所對應的正是題目排除了的平凡解 $a = b$。

STEP 之外

與兩個定點的距離成固定比 $k \neq 1$ 的點的軌跡（locus），稱為阿波羅尼奧斯圓（*circle of Apollonius*）。結果 $(a+7)(b+7) = 100$ 說明 C 和 D 位於圓心的同一側，並且 $MC \cdot MD = r^2$，其中 M 是圓心，r 是半徑：C 和 D 是關於這個圓的反演點（*inverse points*）。（A 和 B 也是如此：$MA = 20$，$MB = 5$。）圓的反演（inversion）是幾何和複分析（complex analysis）中十分有力的工具，在複分析中它就是映射 $z \mapsto 1/\bar{z}$；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）對此有精彩的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。