詳細解答

STEP I 2005，第 5 題

純數學 • 冪的積分

> **STEP I 2005，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q5

關鍵思路

$x+1$ 的冪可以用反向鏈式法則（reverse chain rule）來積分：$\int (x+1)^n \,\mathrm{d}x = \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}$，但有一個例外：當 $n=-1$ 時，答案是對數（logarithm）。因此，本題所有的分類討論都源於同一個問題：「指數何時會變成 -1？」在 (ii) 中，多出來的因子 x 可以透過寫成 $x=(x+1)-1$ 來消去，剩下兩個單純的冪，所以 m 有兩個例外值。

解答

第 (i) 部分

若 $k \neq 0$，指數 $k-1$ 不等於 -1，所以

$$\int_0^1 (x+1)^{k-1} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x+1)^k}{k}\right]_0^1 = \frac{2^k-1}{k}.$$

若 $k=0$，被積函數（integrand）是 $\frac{1}{x+1}$，而由於在 $[0,1]$ 上 $x+1>0$，

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1} \,\mathrm{d}x = \Big[\ln(x+1)\Big]_0^1 = \ln 2.$$

> ? **想一想** 為甚麼 $k \neq 0$ 時的答案會與 $k=0$ 時的答案有關？

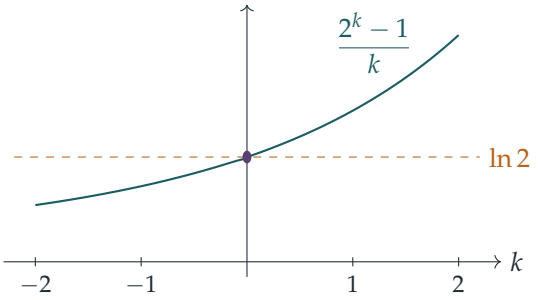
因為當 k 稍微偏離 0 時，被積函數幾乎沒有變化。對於 $0 \leq x \leq 1$，

$$\left|(x+1)^{k-1} - (x+1)^{-1}\right| = \frac{\left|(x+1)^k - 1\right|}{x+1} \leq \left|2^k - 1\right|,$$

這是因為 $1 \le x+1 \le 2$ 意味着 $(x+1)^k$ 介乎 1 與 2^k 之間。在長度為 1 的區間上積分，兩個積分之差至多為 $|2^k - 1|$，而當 $k \to 0$ 時，此值趨向 0。因此，對於 $k \approx 0$（且 $k \neq 0$），

$$\frac{2^k - 1}{k} = \int_0^1 (x+1)^{k-1}\,\mathrm{d}x \approx \int_0^1 (x+1)^{-1}\,\mathrm{d}x = \ln 2,$$

正如所求。換句話說，$k \neq 0$ 時的公式在 $k = 0$ 處有一個「洞」，而 $k = 0$ 時的積分恰好把它填上。



第 (ii) 部分

寫成 $x = (x+1) - 1$，於是

$$x(x+1)^m = (x+1)^{m+1} - (x+1)^m.$$

每一項都是 $x+1$ 的冪，而對它積分時，恰好在其指數為 -1 時才會出現對數。這發生於 $m+1 = -1$ 或 $m = -1$，所以要分的情況是 $m = -1$、$m = -2$，以及其餘所有情況。

一般情況， $m \neq -1, -2$。

$$\int_0^1 x(x+1)^m\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x+1)^{m+2}}{m+2} - \frac{(x+1)^{m+1}}{m+1}\right]_0^1 = \frac{2^{m+2}-1}{m+2} - \frac{2^{m+1}-1}{m+1}.$$

通分之後，分子為

$$(m+1)\left(2^{m+2}-1\right) - (m+2)\left(2^{m+1}-1\right) = 2^{m+1}\left(2(m+1) - (m+2)\right) + 1 = m\,2^{m+1} + 1,$$

所以

$$\int_0^1 x(x+1)^m\,\mathrm{d}x = \frac{m\,2^{m+1}+1}{(m+1)(m+2)}, \qquad m \neq -1, -2.$$

情況 $m = -1$。

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \Big[x - \ln(x+1)\Big]_0^1 = 1 - \ln 2.$$

情況 $m = -2$。

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right) \mathrm{d}x = \left[\ln(x+1) + \frac{1}{x+1}\right]_0^1 = \ln 2 + \tfrac{1}{2} - 1 = \ln 2 - \tfrac{1}{2}.$$

? **想一想** 一般公式在 $m = -1$ 和 $m = -2$ 處會出現 $0/0$。這是否矛盾？

不是：這其實是第 (i) 部分的重演。在 $m = -1$ 處，分子為 $-1 \cdot 2^0 + 1 = 0$，而在 $m = -2$ 處，分子為 $-2 \cdot 2^{-1} + 1 = 0$，所以公式在這兩處只是沒有定義，而不是錯誤；而且與第 (i) 部分一樣，它的極限（limit）值正是特殊情況的答案（$1 - \ln 2 \approx 0.307$ 和 $\ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0.193$）。

驗算

- $m = 0$：$\int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$，而公式給出 $\frac{0+1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$。至於 $m = 1$：$\int_0^1 (x^2 + x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$，而公式給出 $\frac{4+1}{6}$。
- 數值上，$k = 10^{-4}$ 給出 $\frac{2^k - 1}{k} \approx 0.693171$，對比 $\ln 2 \approx 0.693147$。
- 對所有積分使用辛普森法則(Simpson's rule)，取多個 k 和 m 的值(包括 $m = -1, -2$)，結果與公式吻合至 10^{-9}。把 $m = -1 \pm 10^{-5}$ 代入一般公式，得 $0.30685\ldots$，與 $1 - \ln 2$ 相符。

常見錯誤

- 在 $k = 0$ 時寫出 $\frac{(x+1)^0}{0}$，或沒有留意到 (ii) 中 m 有兩個例外值，而不是一個。
- 在 (ii) 中使用分部積分法（integration by parts），卻仍然除以 $m + 1$，沒有察覺這在 $m = -1$ 時並不成立。
- 在 $m = -2$ 的情況中，弄錯 $\int (x+1)^{-2} \, \mathrm{d}x = -(x+1)^{-1}$ 的正負號。

STEP 之外

(i) 中的推論說明 $\lim_{k \to 0} \frac{2^k - 1}{k} = \ln 2$，這正是 2^k 在 $k = 0$ 處的導數（derivative）。當中用到的一般事實是：若被積函數一致收斂（converge uniformly），它們的積分也會收斂。這是大學一年級分析課程的一條核心定理，而缺少一致性時，結論便不成立。同樣的想法也解釋了為何當 $n \to -1$ 時，$\int x^n \, \mathrm{d}x$ 會「變成」$\ln x$。Abbott 的 *Understanding Analysis* 對一致收斂與積分有仔細的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。