詳細解答

STEP I 2005，第 4 題

純數學 • 倍角公式

> **STEP I 2005，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q4

關鍵思路

兩部分都與倍角（multiple angles）有關。在 (i) 中，唯一真正要判斷的是 $\sin\theta$ 的正負號，而題目給定的範圍已把它確定下來；之後只需運用二倍角公式（double-angle formula）和三倍角公式（triple-angle formula）便可。在 (ii) 中，我們把 $\tan 3\theta$ 寫成 $\tan(2\theta+\theta)$ 來推導，然後「由此」（hence）一步便化為關於 $t=\tan\theta$ 的三次方程（cubic）。STEP 題目中的三次方程幾乎總有一個可以看出來的根（root），而 θ 的範圍則告訴我們應保留哪一個根。

解答

第 (i) 部分

由於 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，

$$\sin^2\theta = 1-\tfrac{9}{25} = \tfrac{16}{25}, \qquad \text{所以} \qquad \sin\theta = \pm\tfrac{4}{5}.$$

當 $\frac{3\pi}{2} \le \theta \le 2\pi$ 時，θ 位於第四象限（fourth quadrant），該處 $\sin\theta \le 0$。所以 $\sin\theta = -\frac{4}{5}$，而

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(-\tfrac{4}{5}\right)\left(\tfrac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25},$$

正是所求。

要求 $\cos 3\theta$，我們需要三倍角公式。記 $c = \cos\theta$ 及 $s = \sin\theta$，

$$\begin{aligned}\cos 3\theta = \cos(2\theta+\theta) &= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta \\ &= (2c^2-1)c - 2s^2 c \\ &= (2c^2-1)c - 2(1-c^2)c \\ &= 4c^3 - 3c.\end{aligned}$$

代入 $c = \frac{3}{5}$，

$$\cos 3\theta = 4\cdot\frac{27}{125} - \frac{9}{5} = \frac{108-225}{125} = -\frac{117}{125}.$$

（這裏 $\sin\theta$ 的正負號並無影響，因為 $\cos 3\theta$ 只取決於 $\cos\theta$。）

第 (ii) 部分

恆等式（identity）。記 $t = \tan\theta$。由二倍角公式，$\tan 2\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$，再由和角公式（addition formula），

$$\tan 3\theta = \tan(2\theta+\theta) = \frac{\tan 2\theta + \tan\theta}{1 - \tan 2\theta\tan\theta} = \frac{\dfrac{2t}{1-t^2} + t}{1 - \dfrac{2t^2}{1-t^2}}.$$

把分子和分母同乘以 $1-t^2$，

$$\tan 3\theta = \frac{2t + t(1-t^2)}{(1-t^2) - 2t^2} = \frac{3t - t^3}{1-3t^2},$$

這就是所求的恆等式。以上推導需要 $\tan 2\theta$ 存在，即 $t^2 \neq 1$；當 $t = \pm 1$ 時，我們可以直接驗證：例如取 $\theta = \frac{\pi}{4}$，右方為 $\frac{3-1}{1-3} = -1 = \tan\frac{3\pi}{4}$，而 $t=-1$ 的情況相同，只是正負號互換。

解 $\tan 3\theta = \frac{11}{2}$。由恆等式，

$$\frac{3t-t^3}{1-3t^2} = \frac{11}{2} \quad\Longrightarrow\quad 6t - 2t^3 = 11 - 33t^2 \quad\Longrightarrow\quad 2t^3 - 33t^2 - 6t + 11 = 0.$$

這裏交叉相乘並無問題，因為 $1-3t^2 \neq 0$：假如它等於零，$\tan 3\theta$ 便沒有定義，而不會是 $\frac{11}{2}$。

想一想 怎樣找出 $2t^3 - 33t^2 - 6t + 11$ 的一個根？

任何寫成最簡分數 p/q 的有理根（rational root），其 p 必整除 11，q 必整除 2，所以我們只需試 $\pm 1, \pm 11, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{11}{2}$。試 $t = \frac{1}{2}$：

$$2\cdot\tfrac{1}{8} - 33\cdot\tfrac{1}{4} - 3 + 11 = \tfrac{1}{4} - \tfrac{33}{4} + 8 = 0.$$

所以 $2t-1$ 是一個因式（factor），比較係數可得

$$2t^3-33t^2-6t+11=(2t-1)(t^2-16t-11).$$

該二次式的根為 $t=8\pm\sqrt{64+11}=8\pm5\sqrt{3}$。所以三個候選值是

$$t=\tfrac{1}{2},\qquad t=8+5\sqrt{3}\approx16.66,\qquad t=8-5\sqrt{3}\approx-0.66.$$

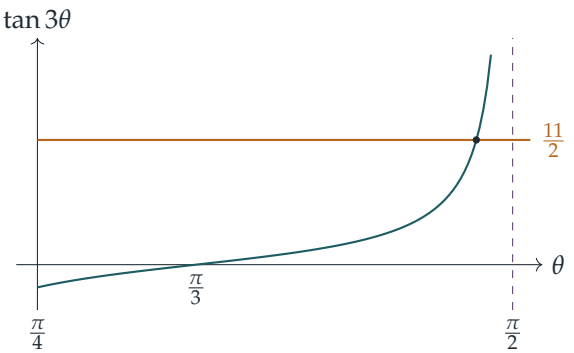
它們對應 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 內的三個角，這些角的三倍的正切都是 $\frac{11}{2}$。

現在運用題目給定的範圍。由於 tan 在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 上遞增，且 $\tan\frac{\pi}{4}=1$，我們需要 $t\geq1$（而 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 本身須排除，因為 $\tan\theta$ 在該處沒有定義）。只有一個候選值符合要求：

$$\tan\theta=8+5\sqrt{3}.$$

另外兩個確實是三次方程的根，但所屬的角在範圍之外：$\frac{1}{2}<1$ 而 $8-5\sqrt{3}<0$。

圖像亦確認恰好只有一個解：當 θ 由 $\frac{\pi}{4}$ 變到 $\frac{\pi}{2}$ 時，3θ 由 $\frac{3\pi}{4}$ 變到 $\frac{3\pi}{2}$，而在該區間上 $\tan3\theta$ 由 -1 連續遞增至 $+\infty$，所以它恰好一次穿過 $\frac{11}{2}$。



驗算

- 在 (i) 中，$\theta=2\pi-\arccos\frac{3}{5}\approx5.3559$，用計算機可得 $\sin2\theta=-0.96$ 及 $\cos3\theta=-0.936=-\frac{117}{125}$。
- 在 (ii) 中，$\theta=\arctan(8+5\sqrt{3})\approx1.5108$，介乎 $\frac{\pi}{4}\approx0.785$ 與 $\frac{\pi}{2}\approx1.571$ 之間，而 $\tan3\theta\approx5.5000$。
- 快速檢驗恆等式：當 $\theta=\frac{\pi}{12}$ 時，$t=2-\sqrt{3}$，右方化簡後得 $1=\tan\frac{\pi}{4}$。

常見錯誤

- 在 (i) 中取 $\sin\theta=+\frac{4}{5}$，以致 $\sin2\theta$ 的正負號出錯。

▶ 在 (ii) 中因為 $t = \frac{1}{2}$ 是自己看出來的根，便就此停下。它確是三次方程的根，但 $\arctan\frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}$。

STEP 之外

這個三次方程有三個根，是因為 $\tan 3\theta = \frac{11}{2}$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 內有三個 θ 的解，彼此相隔 $\frac{\pi}{3}$。同一機制反過來運作，便是三次方程的經典三角解法；更一般而言，棣美弗定理（de Moivre's theorem）把 $\tan n\theta$ 表示為 $\tan\theta$ 的兩個多項式（polynomial）之比，而這些多項式的根正是等距分佈的角的正切。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）說明了為何倍角公式會如此自然地從 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n$ 中產生。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。