詳細解答

STEP I 2005，第 3 題

純數學 • 分式方程

STEP I 2005，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/05-s1-q3

關鍵思路

把等式兩邊同乘 $(x-a)(x-b)$，將每條方程化為多項式方程（polynomial equation），然後數算它的實根（real root）數目。需要小心的地方是：去分母原則上有可能多出原方程不容許的「解」$x=a$ 或 $x=b$，所以我們必須驗證這種情況絕不會發生。在第 (ii) 部分，二次方程有重根（repeated root）當且僅當其判別式（discriminant）為零，由此便得出所求的條件。

解答

第 (i) 部分

當 $x \neq a, b$ 時，我們可以乘以 $(x-a)(x-b)$，而方程等價於

$$\begin{aligned} x(x-b)+x(x-a) &= (x-a)(x-b) \\ 2x^2-(a+b)x &= x^2-(a+b)x+ab \\ x^2 &= ab. \end{aligned}$$

由於 a 與 b 同號，$ab>0$，所以這方程有兩個相異實根 $x=\sqrt{ab}$ 和 $x=-\sqrt{ab}$。

我們仍須確認這兩個根是容許的值。假如 $x=a$ 是根，則 $a^2=ab$，而由於 $a\neq 0$，這給出 $a=b$，與事實不符。同理，$x=b$ 也不是根。因此兩個根都是真正的解，方程恰有兩個相異實數解 $x=\pm\sqrt{ab}$。

第 (ii) 部分

同樣，當 $x \neq a, b$ 時乘以 $(x-a)(x-b)$：

$$2x^2 - (a+b)x = (1+c)(x^2 - (a+b)x + ab),$$

整理後得

$$q(x) \equiv (1-c)x^2 + c(a+b)x - (1+c)ab = 0.$$

因為 $c \neq 1$，首項係數（leading coefficient）不為零，所以這確實是一條二次方程。

> **想一想** q 的其中一個根會不會是 a 或 b，以致必須捨去？

代入看看：

$$q(a) = (1-c)a^2 + c(a+b)a - (1+c)ab = a^2 - ab = a(a-b),$$
$$q(b) = b^2 - ab = b(b-a)$$

（含 c 的項互相抵消）。由於 a、b 皆不為零且互不相等，兩者都不為零。所以 a 和 b 永遠不是 q 的根。這表示 q 的每個實根都是原方程的解，反之亦然。

q 的判別式為

$$\begin{aligned}\Delta &= c^2(a+b)^2 + 4(1-c)(1+c)ab \\ &= c^2[(a+b)^2 - 4ab] + 4ab \\ &= c^2(a-b)^2 + 4ab.\end{aligned}$$

若 $c^2 = -\dfrac{4ab}{(a-b)^2}$（而 $a \neq b$，所以可以除以 $(a-b)^2$），則 $\Delta = 0$。這時二次方程恰有一個（重）實根

$$x = -\frac{c(a+b)}{2(1-c)},$$

而根據上面的驗證，這個根不是 a 或 b。所以方程恰有一個實數解，正如所求。（事實上逆命題（converse）也成立。若 $\Delta > 0$ 則有兩個解，若 $\Delta < 0$ 則無解，所以這個條件也是必要的。）

改寫條件。 通分後，

$$1 - \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = \frac{(a-b)^2 - (a+b)^2}{(a-b)^2} = \frac{-4ab}{(a-b)^2},$$

所以條件就是 $c^2 = 1 - \left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2$，正如所求。

推導 $0 < c^2 \leq 1$。 平方數 $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$ 為非負，所以由第二種形式可得 $c^2 \leq 1$。第一種形式給出 $c^2 = -4ab/(a-b)^2$。由於 $ab \neq 0$，這個值不為零；而對於實數 c 有 $c^2 \geq 0$，所以 $c^2 > 0$。（這也告訴我們 $ab < 0$：a 與 b 異號，這與第 (i) 部分吻合。）因此，條件只有在 $0 < c^2 \leq 1$ 時才可能成立。

上限值是可以取到的。$c^2 = 1$ 當且僅當 $a + b = 0$，這時 $c = -1$（因為 $c \neq 1$）。

驗算

- 取 $a = 4$，$b = -1$。則 $c^2 = 16/25$；選 $c = \frac{4}{5}$。重根為 $x = -\frac{4}{5} \cdot 3/(2 \cdot \frac{1}{5}) = -6$，而確實有 $\frac{-6}{-10} + \frac{-6}{-5} = 0.6 + 1.2 = 1.8 = 1 + c$。
- 極端情況 $a = 1$，$b = -1$，$c = -1$ 給出 $\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1} = 0$，即 $2x^2 = 0$：只有一個解 $x = 0$。
- 在第 (i) 部分，$a = 1$，$b = 4$ 給出 $x = \pm 2$：$\frac{2}{1} + \frac{2}{-2} = 1$ 及 $\frac{-2}{-3} + \frac{-2}{-6} = 1$。

常見錯誤

- 去分母之後忘記檢查所得的根不是 a 或 b。在本題中這一步結果並無影響，但仍必須加以證明。
- 展開判別式時沒有把含 c^2 的項歸併在一起。寫出 $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$，條件才會乾淨利落地得出。
- 聲稱 $c^2 \geq 0$ 而不是 $c^2 > 0$。嚴格不等式（strict inequality）來自 $ab \neq 0$。

STEP 之外

等式左邊是一個有理函數（rational function），而「它的圖像與水平線 $y = 1 + c$ 相交多少次？」其實是一個關於其值域（range）的問題。這裏找到的條件，挑出了該函數的轉向點（turning point）的值，也就是水平線剛好與圖像相切的高度。追問多項式何時有重根，會引出判別式，以及更一般的結式（resultant），這些都會在大學一年級的代數課程中出現。想做更多這類風格的題目，可參考 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。