詳細解答

# STEP I 2005，第 2 題

純數學 • 拋物線的切線與法線

> **STEP I 2005，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q2

## 關鍵思路

把拋物線 (parabola) $y^2 = 4x$ 用 $(t^2, 2t)$ 參數化 (parametrise) 之後，每條切線 (tangent) 和法線（normal）都是一條關於 $x$ 和 $y$ 的簡短線性方程，所以求交點不過是解兩條聯立線性方程。$(1, 0)$ 是焦點（focus），它位於 $PQ$ 上這個條件，會化為 $p$ 與 $q$ 之間一條簡潔的關係式，而正正是這條關係式令 $P$ 和 $Q$ 處的切線互相垂直。得到這一點之後，那個長方形幾乎是自然而然地出現。

## 解答

### 切線與點 $R$

在點 $(t^2, 2t)$，我們有 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2$，所以 $C$ 在該點的斜率（gradient）是 $\dfrac{2}{2t} = \dfrac{1}{t}$（這沒有問題，因為 $t \neq 0$）。因此 $P$ 處的切線是

$$y - 2p = \frac{1}{p}(x - p^2) \quad \Longleftrightarrow \quad py = x + p^2,$$

同理，$Q$ 處的切線是 $qy = x + q^2$。兩式相減，

$$(p - q)\, y = p^2 - q^2 = (p - q)(p + q),$$

由於 $p \neq q$，我們可以除以 $p - q$，得到 $y = p + q$。於是 $x = py - p^2 = p(p + q) - p^2 = pq$。所以

$$R = (pq,\ p + q),$$

正如題目所求。

**法線與點 $S$**

$(t^2, 2t)$ 處的法線與切線垂直，所以它的斜率是 $-t$。$P$ 處的法線是

$$y - 2p = -p\,(x - p^2) \quad \Longleftrightarrow \quad px + y = 2p + p^3,$$

而 $Q$ 處的法線是 $qx + y = 2q + q^3$。兩式相減，

$$(p - q)\,x = 2(p - q) + (p^3 - q^3) = (p - q)(2 + p^2 + pq + q^2),$$

所以，再次除以 $p - q \neq 0$，

$$x = p^2 + pq + q^2 + 2, \qquad y = 2p + p^3 - px = -p^2q - pq^2 = -pq\,(p + q).$$

以上結果對任何 $p$ 和 $q$ 都成立；現在我們運用那個額外條件。

**運用 $(1, 0)$ 位於 $PQ$ 上這個條件**

弦（chord）$PQ$ 的斜率是

$$\frac{2p - 2q}{p^2 - q^2} = \frac{2}{p + q}$$

（當 $p + q \neq 0$ 時），所以它的方程是 $y - 2p = \dfrac{2}{p + q}(x - p^2)$，化簡後得

$$(p + q)\,y = 2x + 2pq.$$

這個形式同時涵蓋 $p + q = 0$ 的情況，這時它給出通過 $P$ 和 $Q$ 的鉛垂線 $x = -pq = p^2$。代入 $(x, y) = (1, 0)$ 得 $0 = 2 + 2pq$，所以

$$pq = -1.$$

代入 $S$ 的坐標：

$$S = (p^2 + q^2 + 2 + pq,\ -pq(p + q)) = (p^2 + q^2 + 1,\ p + q),$$

正如題目所求。同時留意，現在 $R = (-1,\ p + q)$，它位於直線 $x = -1$ 上，亦即準線（directrix）上。

**$PSQR$ 是長方形**

> ? **想一想** 要證明四個給定的點構成一個長方形，最乾淨利落的方法是甚麼？

一條不錯的路線是：先證明它是平行四邊形（parallelogram）（對角線互相平分），再證明其中一隻角是直角。

平行四邊形。在 $PSQR$ 中，對角線是 $PQ$ 和 $SR$。利用 $pq = -1$，

$$R + S = (pq + p^2 + q^2 + 1,\ 2(p + q)) = (p^2 + q^2,\ 2p + 2q) = P + Q,$$

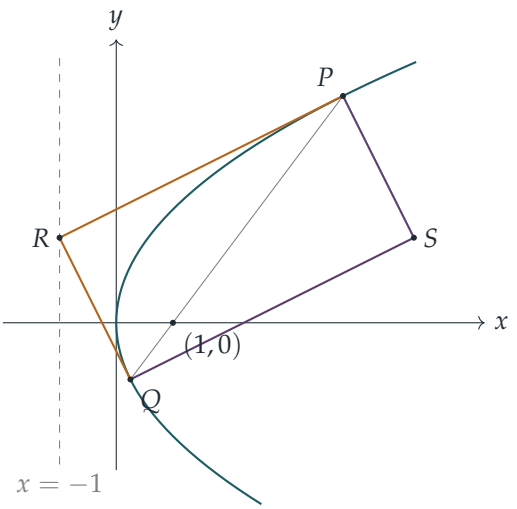
所以 $RS$ 的中點等於 $PQ$ 的中點。對角線互相平分，所以 $PSQR$ 是平行四邊形。它是一個真正的平行四邊形，而不是退化（degenerate）的：$P$、$R$ 和 $Q$ 並不共線（collinear），因為 $R$ 同時位於兩條切線上，而拋物線上兩個不同點的切線只相交一次，並且任何一條都不會通過另一個切點。

一隻直角。邊 $RP$ 和 $RQ$ 分別沿着 $P$ 和 $Q$ 處的切線，斜率為 $\frac{1}{p}$ 和 $\frac{1}{q}$。它們的乘積是

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q} = \frac{1}{pq} = -1,$$

所以兩條切線互相垂直，角 $PRQ$ 是直角。

有一隻角是直角的平行四邊形就是長方形，所以 $PSQR$ 是長方形。（等價的說法是：$P$ 和 $Q$ 處的角都是直角，因為每條法線都與自己的切線垂直；再加上 $R$ 處的直角，第四隻角也必定是直角。）




圖中所示為 $p = 2$、$q = -\frac{1}{2}$ 的情況：切線為琥珀色，法線為梅子色，焦點弦 $PQ$ 為灰色。

## 驗算

取 $p = 2$、$q = -\frac{1}{2}$，於是 $pq = -1$。這時 $P = (4, 4)$ 而 $Q = (\frac{1}{4}, -1)$，通過這兩點的直線 $y - 4 = \frac{4}{3}(x - 4)$ 確實通過 $(1, 0)$。由公式得 $R = (-1, \frac{3}{2})$ 和 $S = (\frac{21}{4}, \frac{3}{2})$。直接驗證：$\overrightarrow{RP} = (5, \frac{5}{2})$ 與 $\overrightarrow{QS} = (5, \frac{5}{2})$ 相等，而 $\overrightarrow{RQ} = (\frac{5}{4}, -\frac{5}{2})$ 與 $\overrightarrow{RP}$ 的點積（dot product）是

$\frac{25}{4} - \frac{25}{4} = 0$。所以 $PSQR$ 的確是長方形。我們亦以精確分數，就約二千組隨機選取的 $p$ 和 $q$ 核對了所有坐標公式。

## 常見錯誤

- 除以 $p - q$ 而沒有說明為何可以這樣做；題目給出 $p \neq q$，正是為了讓你可以這樣做。
- 只證明了某一個角上的兩條鄰邊互相垂直，單憑這一點並不足以構成長方形：你需要的是平行四邊形加上一隻直角，或者三個角都是直角。
- 忘記在 $S$ 中使用 $pq = -1$：一般情況下法線的交點是 $\left(p^2 + pq + q^2 + 2, -pq(p + q)\right)$，只有在焦點弦上它才會化簡成題目給出的形式。

## STEP 之外

通過焦點的弦稱為*焦點弦*（focal chord），而本題證明了關於它的兩個經典事實：弦兩端的切線互相垂直，並且相交於準線上。兩者都是圓錐曲線（conics）的極點與極線（poles and polars）理論的特殊情況，在這套理論中，準線就是焦點的極線；射影幾何（projective geometry）令這類結果幾乎不證自明。若想循這個方向探索處理圓錐曲線的參數方法，Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（數學進階難題集）是一個好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。