詳細解答

STEP I 2005，第 12 題

概率與統計 • 溫氏圖與界限

> **STEP I 2005，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q12

關鍵思路

凡是問「哪個範圍的數值才不會自相矛盾？」的題目，其實都是關於一幅溫氏圖（Venn diagram）：圖中各個區域的值未知，但必須全部非負。先用盡量少的自由未知數表示每一個區域；這樣，每個「此區域 ≥ 0」的條件就變成一個界限，把所有界限合起來便得到所求範圍。在第 (ii) 部分，我們用一個計數論證（把三個單項概率相加時，每名巫師被數了多少次），毋須知道個別區域的值，便可求出「恰好兩件」的概率。

解答

第 (i) 部分

設 S 為哈比人抽煙斗的事件（event），H 為他戴帽子的事件。令 $t = \mathrm{P}(S \cap H)$。溫氏圖的四個區域是

$$\mathrm{P}(S \cap H) = t, \qquad \mathrm{P}(S \cap H') = 0.7 - t,$$
$$\mathrm{P}(S' \cap H) = 0.4 - t, \qquad \mathrm{P}(S' \cap H') = 1 - (0.7 + 0.4 - t) = t - 0.1.$$

只要所選的 t 令四者皆為非負，就得到一個真正的概率分佈（probability distribution），反之亦然。真正起約束作用的條件是 $t \geq 0.1$（來自最後一個區域）和 $t \leq 0.4$（來自第三個區域）；其餘條件隨之成立。所以 $0.1 \leq t \leq 0.4$，而由於 $p = 0.7 - t$，

$$0.3 \leq p \leq 0.6.$$

兩個端點都可以取到：當抽煙斗而又戴帽子的哈比人盡量少時（每個哈比人至少做兩件事的其中一件），$p = 0.6$；當每個戴帽子的哈比人都抽煙斗時，$p = 0.3$。

第 (ii) 部分：恰好兩件

設 H、C、R 分別為巫師戴帽子、披斗篷和戴戒指的事件。設 a、b 分別為巫師在這三件物品中恰好穿戴一件和恰好穿戴兩件的概率。已知一件也沒有的概率是 0.05，三件齊備的概率是 0.1，所以

$$0.05 + a + b + 0.1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad a + b = 0.85.$$

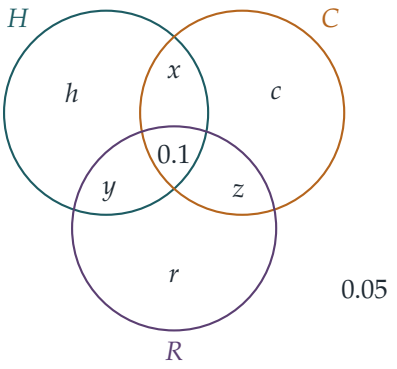
現在把三個已知概率相加：$\mathrm{P}(H) + \mathrm{P}(C) + \mathrm{P}(R) = 0.7 + 0.8 + 0.4 = 1.9$。在這個和之中，恰好穿戴 k 件物品的巫師被數了 k 次，所以

$$a + 2b + 3(0.1) = 1.9 \quad \Longrightarrow \quad a + 2b = 1.6.$$

兩式相減，得 $b = 0.75$（而 $a = 0.1$）。巫師恰好穿戴其中兩件物品的概率是 $\frac{3}{4}$。

第 (ii) 部分：q 的範圍

如圖所示，為圓內的七個區域標上記號：h、c、r 代表恰好一件，x、y、z 代表恰好兩件，中央是 0.1，圓外是 0.05。



由 H、C、R 各自的總和，以及第 (ii) 部分至今所得的結果，

$$h + x + y = 0.6, \qquad c + x + z = 0.7,$$
$$r + y + z = 0.3, \qquad x + y + z = 0.75.$$

利用最後一條方程，從首三條方程中各消去一對未知數，

$$h = z - 0.15, \qquad c = y - 0.05, \qquad r = x - 0.45.$$

（驗算一下：$h + c + r = 0.75 - 0.65 = 0.1 = a$。）所以整個分佈完全由滿足 $x + y + z = 0.75$ 的 x、y、z 決定，而它是一個真正的分佈，當且僅當六個區域全部非負：

$$x \geq 0.45, \qquad y \geq 0.05, \qquad z \geq 0.15.$$

想一想 x 最大可以是多少？

由於 $x = 0.75 - y - z$，而 $y + z \geq 0.05 + 0.15 = 0.2$，所以 $x \leq 0.55$，等號在 $y = 0.05$、$z = 0.15$ 時成立。最小值 $x = 0.45$ 也可以取到，例如取 $y = 0.1$、$z = 0.2$。兩者之間的每一個值同樣可以取到，因為我們可以連續地改變 y 和 z。因此

$$0.45 \leq x \leq 0.55.$$

最後，披着斗篷時戴帽子但不戴戒指，正好就是區域 x，所以

$$q = \mathrm{P}(H \cap R' \mid C) = \frac{\mathrm{P}(H \cap C \cap R')}{\mathrm{P}(C)} = \frac{x}{0.8}, \qquad \text{由此得} \qquad \frac{9}{16} \leq q \leq \frac{11}{16}.$$

驗算

- 在極端情況 $x = 0.55$、$y = 0.05$、$z = 0.15$ 下，我們得到 $h = 0$、$c = 0$、$r = 0.1$；八個區域之和為 1，並給出 $\mathrm{P}(H) = 0.7$、$\mathrm{P}(C) = 0.8$、$\mathrm{P}(R) = 0.4$，符合要求。
- 我們以 0.01 為步長，列舉了八個區域所有與數據相符的賦值：每一個都滿足 $x + y + z = 0.75$，而 q 的取值由 0.5625 至 0.6875。同樣地，在 (i) 中，p 的取值由 0.3 至 0.6。

常見錯誤

- 在 (i) 中，忘記了「兩者皆非」這個區域，因而得到下界 $t \geq 0$ 而不是 $t \geq 0.1$，結果得出錯誤的上限 $p \leq 0.7$。
- 在 (ii) 中，除以 1 而不是除以 $\mathrm{P}(C) = 0.8$：「已知他披着斗篷」這個條件會改變分母。
- 把 H、C、R 當作獨立(independent)事件。題目從沒有說它們獨立，而事實上 $\mathrm{P}(H \cap C \cap R) = 0.1 \neq 0.7 \times 0.8 \times 0.4$。

STEP 之外

某個量是未知概率的線性函數，而這些概率須滿足若干線性方程及非負條件，要求這個量的取值範圍，其實就是一個小型的線性規劃 (linear programme) 問題：極值總是出現在可行域 (feasible region) 的角點，這正是我們的極值都來自把某些區域設為零的原因。同樣的想法可得出第 (i) 部分所用的弗雷歇（Fréchet）界限 $\max(0, \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 1) \leq \mathrm{P}(A \cap B) \leq \min(\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B))$。想進一步了解容斥原理（inclusion–exclusion）和條件概率（conditional probability），可閱讀 Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率論入門教材）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。