詳細解答

STEP I 2005，第 11 題

力學 • 向量運動學

> **STEP I 2005，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q11

關鍵思路

這道題由始至終都在考兩個向量（vector）$\mathbf{r}$ 與 $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ 之間的相對位置。垂直（perpendicular）即純量積（scalar product）$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$ 等於零；平行（parallel）即「交叉」組合 $xv_y - yv_x$ 等於零。只要寫出 $\sin 2t = 2\sin t \cos t$ 和 $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$，這兩個式子都可以化簡得十分整齊。至於求距離和繪畫草圖，把所有式子都用 $\cos t$ 表示，或者乾脆消去 t，會方便得多。

解答

設 $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$，其中

$$x = \sin 2t = 2\sin t \cos t, \qquad y = 2\cos t, \qquad 0 \le t < 2\pi.$$

求導後，得速度（velocity）為

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = (2\cos 2t)\,\mathbf{i} - (2\sin t)\,\mathbf{j}.$$

第 (i) 部分

當 $x = 0$ 且 $y = 0$ 時，質點（particle）位於原點。條件 $y = 0$ 即 $\cos t = 0$，所以在給定範圍內 $t = \frac{\pi}{2}$ 或 $t = \frac{3\pi}{2}$。在這兩個時刻，$x = 2\sin t \cos t = 0$ 自動成立。因此質點恰好在 $t = \frac{\pi}{2}$ 和 $t = \frac{3\pi}{2}$ 這兩個時刻位於原點，其他時刻都不在原點，這正是要證明的結果。

第 (ii) 部分

當 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}=0$ 時，速度與位移（displacement）垂直（兩個向量都須非零，「垂直」才有意義）。現在

$$\begin{aligned}\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} &= 2\sin 2t\cos 2t - 4\sin t\cos t\\ &= 2\sin 2t\cos 2t - 2\sin 2t\\ &= 2\sin 2t\,(\cos 2t-1)\\ &= -4\sin 2t\,\sin^2 t,\end{aligned}$$

其中用了 $\cos 2t-1=-2\sin^2 t$。當 $\sin 2t=0$ 或 $\sin t=0$ 時，此式等於零，即

$$t=0,\ \tfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \tfrac{3\pi}{2}.$$

> **想一想** $t=\frac{\pi}{2}$ 和 $t=\frac{3\pi}{2}$ 真的應該列入答案嗎？

不應該。由第 (i) 部分可知，在這兩個時刻 $\mathbf{r}=\mathbf{0}$，而零向量沒有方向，所以說它與任何向量垂直都沒有實質意義；純量積等於零，只是出於一個平凡的原因。在 $t=0$ 時，$\mathbf{r}=2\mathbf{j}$ 而 $\mathbf{v}=2\mathbf{i}$；在 $t=\pi$ 時，$\mathbf{r}=-2\mathbf{j}$ 而 $\mathbf{v}=2\mathbf{i}$：這些才是真正互相垂直的非零向量。因此，速度與位移垂直的時刻是

$$t=0 \quad 和 \quad t=\pi.$$

第 (iii) 部分

首先，$\mathbf{v}$ 永不為零：若 $\mathbf{v}=\mathbf{0}$，則必須 $\sin t=0$，但這時 $\cos 2t=1-2\sin^2 t=1\neq 0$。

兩個非零向量 (x,y) 與 (v_x,v_y) 平行，當且僅當 $xv_y-yv_x=0$。這裏

$$\begin{aligned}xv_y-yv_x &= \sin 2t\,(-2\sin t)-2\cos t\,(2\cos 2t)\\ &= -4\sin^2 t\cos t-4\cos t\,(1-2\sin^2 t)\\ &= -4\cos t\,(1-\sin^2 t)\\ &= -4\cos^3 t.\end{aligned}$$

此式只在 $\cos t=0$ 時等於零，而由第 (i) 部分可知，這只在質點位於原點時才會發生。所以只要質點不在原點，就有 $\cos t\neq 0$，這個組合不等於零，速度亦不與位移平行。證明至此完成。

第 (iv) 部分

設 $c=\cos^2 t$，則 $0\le c\le 1$。於是

$$|\mathbf{r}|^2=\sin^2 2t+4\cos^2 t=4\sin^2 t\cos^2 t+4\cos^2 t=4c(1-c)+4c=4c(2-c).$$

二次式 $4c(2-c)$ 的頂點在 $c=1$，並在 $[0,1]$ 上遞增，所以它在這個區間上的最大值在 $c=1$ 處取得，這時 $|\mathbf{r}|^2=4$。因此質點與原點的最大距離是

$$|\mathbf{r}|_{\max}=2,$$

在 $\cos^2 t=1$ 時達到，即 $t=0$ 和 $t=\pi$，對應的點是 $(0,\pm2)$。這正好是第 (ii) 部分求得的時刻，令人安心：距離達到最大值時，速度的徑向分量（radial component）必定為零。

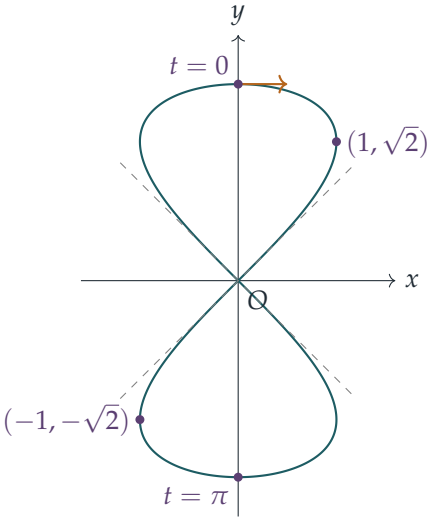
至於草圖，先消去 t。由於 $x=y\sin t$ 及 $\sin^2 t=1-\cos^2 t=1-\frac{1}{4}y^2$，

$$x^2=y^2\Big(1-\frac{y^2}{4}\Big),\qquad \text{即}\qquad 4x^2=y^2(4-y^2).$$

草圖上應顯示以下特徵：

- 曲線對兩條坐標軸都對稱，且 $-2\le y\le 2$。
- $|x|=|\sin 2t|\le 1$，當 $y=\pm\sqrt{2}$ 時 $|x|=1$。
- 在原點附近 $4x^2\approx 4y^2$，所以曲線在該處沿直線 $y=\pm x$ 自相交。這與 $t=\frac{\pi}{2}$ 時的速度 $-2\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ 及 $t=\frac{3\pi}{2}$ 時的速度 $-2\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ 吻合。
- 在 $(0,\pm2)$ 處路徑是水平的，正如第 (ii) 部分所示。

隨着 t 增加：質點從 $(0,2)$ 出發，沿 $+\mathbf{i}$ 方向運動，順着上方環圈的右邊下行至原點，再繞下方環圈一周（先走左邊）回到原點，最後沿上方環圈的左邊上行。整條路徑是一個 8 字形。



驗算

- 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 時：$\mathbf{r} = \mathbf{i} + \sqrt{2}\,\mathbf{j}$，滿足 $4x^2 = 4 = y^2(4 - y^2) = 2 \cdot 2$，而 $|\mathbf{r}| = \sqrt{3} < 2$，與 $4c(2 - c) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = 3$ 一致。
- 在 $[0, 2\pi)$ 上對 t 作細密取樣，得最大距離為 2.000，距離接近零的情況只出現在 $t \approx 1.57$ 和 4.71，並且在隨機選取的時刻驗證了恆等式 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = -4 \sin 2t \sin^2 t$ 和 $xv_y - yv_x = -4\cos^3 t$。最小速率約為 1.32，所以 $\mathbf{v}$ 永不為零。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分把 $t = \frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{3\pi}{2}$ 列入答案：純量積在這兩個時刻等於零，只是因為 $\mathbf{r} = \mathbf{0}$。
- 在第 (iii) 部分忘記驗證 $\mathbf{v}$ 永不為零；零速度會與任何向量「平行」。
- 把兩個環圈畫成左右並排：這個 8 字是直立的，兩個環圈分別在原點的上方和下方，因為 y 的範圍是 $[-2, 2]$，而 x 的範圍只有 $[-1, 1]$。

STEP 之外

$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{r}|^2$ 和 $xv_y - yv_x$ 這兩個量，分別是運動的徑向部分和（每單位質量計）對原點的角動量（angular momentum）；在極坐標（polar coordinates）中，後者就是 $r^2\dot{\theta}$。第 (iii) 部分說明角動量只在原點處為零，所以質點從不沿直線直接趨向或遠離 O。這條曲線本身就是 Gerono 雙紐線（lemniscate of Gerono），是眾多經典 8 字形曲線之一。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）正是以這種思路闡述極坐標和角動量。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。