詳細解答

STEP I 2005，第 10 題

力學 • 碰撞與恢復係數

STEP I 2005，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

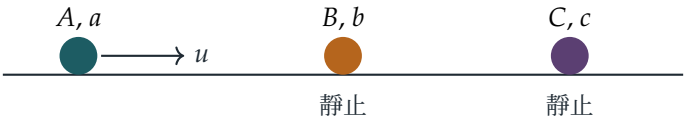
step.maths.org/questions/05-s1-q10

關鍵思路

每一次碰撞都是兩個光滑質點（particle）之間的直接碰撞（direct impact），因此可得兩條方程：沿直線方向的動量守恆（conservation of momentum），以及牛頓實驗定律（Newton's experimental law）（分離速率 $= e\times$ 接近速率）。只要對一般的一對質點解一次這兩條方程，所得公式便可在第二次碰撞中重複使用。至於各個特殊情況，真正的問題是：兩次碰撞之後，事情是否就此結束？題目要求的是最終速度，所以必須檢查沒有任何質點會追上前面的那一個。

解答

我們把 A、B、C 視為在光滑平面上沿同一直線運動的質點，因此沒有水平方向的外力作用，每次碰撞中沿直線方向的動量都守恆。取 u 的方向為正。設 p 為 A 與 B 碰撞後的速度，q 為 B 與 C 碰撞後的速度。



第一次碰撞：求 v

碰撞前 A 的速度為 u，而 B 靜止；碰撞後兩者的速度分別為 p 和 v。由動量守恆和牛頓定律得

$$au = ap + bv, \qquad v - p = eu.$$

把 $p = v - eu$ 代入第一條方程，得 $au = av - aeu + bv$，所以

$$v = \frac{a(1+e)u}{a+b}, \qquad p = v - eu = \frac{(a-eb)u}{a+b}.$$

留意 $v > 0$，所以 B 確實朝着 C 運動。

第二次碰撞：求 w

這與剛才的情況相同，只是換成 B（質量 b，速率 v）撞向 C（質量 c，靜止）。因此可以重用上面的公式，作代換 $a \to b$、$b \to c$、$u \to v$：

$$w = \frac{b(1+e)v}{b+c}, \qquad q = \frac{(b-ec)v}{b+c}.$$

代入 v 的表達式，

$$w = \frac{b(1+e)}{b+c} \cdot \frac{a(1+e)u}{a+b} = \frac{abu(1+e)^2}{(a+b)(b+c)},$$

正如所求。

這兩次碰撞之後，各質點的速度為 p、q、w。只有當 $p > q$（A 追上 B）或 $q > w$（B 追上 C）時，才會再有碰撞；由牛頓定律，$q - w = -ev < 0$，所以後者永不發生，我們只需比較 p 和 q。

> **想一想** 為甚麼不能在兩次碰撞之後就停下來，直接寫出 p、q、w 作為答案？

因為題目問的是最終速度。假如之後 A 仍然比 B 快，它便會再次撞上 B，一切都會隨之改變。所以在每種情況下，我們都必須檢查 $p \le q$。

第 (i) 部分

這裏 $a = eb$ 及 $b = ec$（其中 $e > 0$，因為質量為正數）。於是 $a - eb = 0$ 及 $b - ec = 0$，所以

$$p = 0, \qquad q = 0.$$

至於 w，利用 $a + b = b(1+e)$ 及 $b + c = b + b/e = b(1+e)/e$：

$$w = \frac{eb \cdot b\,u(1+e)^2}{b(1+e) \cdot b(1+e)/e} = e^2 u.$$

A 和 B 都靜止，而 C 向前離去，所以不會再有碰撞。最終速度為

$$A:\ 0, \qquad B:\ 0, \qquad C:\ e^2 u.$$

每次碰撞都把全部動量傳給下一個質點，就像一個牛頓擺（Newton's cradle），只是後面的質點較輕。

第 (ii) 部分

現在 $b = ea$ 及 $c = eb = e^2a$。於是

$$v = \frac{a(1+e)u}{a(1+e)} = u, \qquad p = \frac{(a-e^2a)u}{a(1+e)} = (1-e)u,$$

當中用了 $1-e^2 = (1-e)(1+e)$。在第二次碰撞中，質量 b、c 之比與 a、b 之比相同，而 B 以速率 u 到達，所以它完全是第一次碰撞的翻版：

$$w = u, \qquad q = (1-e)u.$$

（直接計算：$w = \dfrac{a \cdot ea \cdot u(1+e)^2}{a(1+e) \cdot ea(1+e)} = u$。）

現在 $p = q$，所以 A 永遠追不上 B；而當 $e > 0$ 時 $q = (1-e)u < u = w$，所以 B 永遠追不上 C。最終速度為

$$A:\ (1-e)u, \qquad B:\ (1-e)u, \qquad C:\ u,$$

全部沿 A 原來的運動方向。

驗算

- (ii) 的動量：$a(1-e)u + ea(1-e)u + e^2a\,u = au$。(i) 的動量：$c \cdot e^2u = e^2c\,u = au$。
- 在 (ii) 中取 $e = 1$（完全彈性，perfectly elastic），A 和 B 最終靜止，而 C 以 u 離去；動能（kinetic energy）守恆：$\frac{1}{2}au^2 = \frac{1}{2}cu^2$ 需要 $c = a$，這正是 $c = e^2a$ 在 $e = 1$ 時的情況。
- 一個數值例子：取 $e = \frac{1}{2}$，質量為 $1, 2, 4$ 及 $u = 1$（第 (i) 部分），最終速度為 $0, 0, \frac{1}{4}$；質量為 $4, 2, 1$（第 (ii) 部分）則得 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$。我們以精確算術，對數以千計隨機選取的質量和 e 值，並模擬其後可能出現的任何碰撞，驗證了這些結果以及 v 和 w 的一般公式。

常見錯誤

- 寫牛頓定律時把速度的次序弄反：正確的是碰撞後的（前方質點的速率 − 後方質點的速率）$= e \times$ 碰撞前的（後方 − 前方）。
- 直接寫出兩次碰撞後的速度，而沒有檢查 A 會否再次追上 B。

STEP 之外

連串碰撞是描述動量和能量如何在物料中傳遞的最簡單模型，而第 (i) 部分的質量比經過特意選取，使全部動量最終都落在最後一個質點上。若把質量的次序倒過來，重的在後、輕的在前，並且 e 接近 1，最後一個質點便會比第一個質點運動得更快：這正是那個玩具背後的原理——把一個小球疊在一個大球上，讓兩者一同落下，小球便會高高彈上半空。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）以質心參考系（centre-of-mass frame）處理碰撞，令 v 和 w 這類公式變得幾乎一目了然。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。