詳細解答

STEP I 2005，第 1 題

純數學 • 數字和的計數

> **STEP I 2005，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q1

關鍵思路

五位數的數字和（digit sum）最大可能是 $9 \times 5 = 45$，而題目要求的兩個數字和都很接近這個值。因此，與其直接數各個數字本身，不如數每個數字比 9 少了多少。這些差額（shortfall）都是很小的非負數，總和又是一個固定的小數目，數起來十分容易：既可以逐一列出各種情況，也可以用「星與棒」法（stars and bars）。

解答

把這個數寫成 $d_1d_2d_3d_4d_5$，其中 $d_1 \in \{1,\ldots,9\}$（首位不能是零），而 $d_2,\ldots,d_5 \in \{0,\ldots,9\}$。設

$$e_i = 9 - d_i \qquad (i = 1,\ldots,5),$$

即第 i 個數字的*差額*。每個 e_i 都是整數，且 $0 \le e_i \le 9$（並且 $e_1 \le 8$，因為 $d_1 \ge 1$），而

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = 45 - (e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5).$$

不同的數給出不同的序列 $(e_1,\ldots,e_5)$，反之亦然，所以數算數字和為 S 的數，等同於數算總和為 $45 - S$ 的有序差額序列。

第 (i) 部分

數字和為 43，即差額的總和是 $45 - 43 = 2$。把 2 分拆成非負部分只有兩種方法：

- **一個數字少了 2，其餘少了 0**。一個數字是 7，其餘四個是 9。這個 7 可以放在 5 個位置中的任何一個：共 5 個數（$79999, 97999, \ldots, 99997$）。
- **兩個數字各少了 1，其餘少了 0**。兩個數字是 8，其餘三個是 9。我們從 5 個位置中選

出 2 個來放 8：共 $\binom{5}{2} = 10$ 個數（88999, 89899, . . . , 99988）。

每個數字都至少是 7，所以首位數字絕不會是 0，以上各數確實都是五位數。這兩種情況互不重疊，並且涵蓋了所有可能，所以共有

$$5 + 10 = 15$$

個五位數的數字和為 43，正如題目所求。

第 (ii) 部分

現在差額的總和必須是 $45 - 39 = 6$。由於 $6 \leq 8$，沒有任何一個差額會超出其上限：$e_1 \leq 6 \leq 8$ 保證 $d_1 \geq 3$，而 $e_i \leq 6 \leq 9$ 保證其餘數字都在 3 與 9 之間。所以我們只需求出下式的有序解的數目：

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 = 6, \qquad e_i \geq 0 \text{ 且為整數.}$$

? **想一想** 怎樣才可以不用逐一列出而數出這些解？

想像把 6 顆星排成一行，用 4 根棒把它們分成 5 組：

$$\star\star\,|\,|\,\star\,|\,\star\star\star\,| \quad \text{代表} \quad (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) = (2, 0, 1, 3, 0).$$

6 顆星和 4 根棒的每一種排列都恰好給出一個解，而每一個解也恰好來自一種排列。只要選定 10 個位置中哪 4 個放棒，排列便隨之確定，所以解的數目是

$$\binom{10}{4} = 210.$$

因此，共有 **210** 個五位數的數字和為 39。

如果你寧願像第 (i) 部分那樣分情況來數，可以列出把 6 分拆成最多五個正數部分的所有方法，再數出每種方法的排列數目：

差額	數的個數	差額	數的個數
6	5	3, 2, 1	$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$
5, 1	$5 \cdot 4 = 20$	3, 1, 1, 1	$5 \cdot 4 = 20$
4, 2	$5 \cdot 4 = 20$	2, 2, 2	$\binom{5}{2} = 10$
4, 1, 1	$5 \cdot \binom{4}{2} = 30$	2, 2, 1, 1	$\binom{5}{2}\binom{3}{2} = 30$
3, 3	$\binom{5}{2} = 10$	2, 1, 1, 1, 1	5

總數是 $5 + 20 + 20 + 30 + 10 + 60 + 20 + 10 + 30 + 5 = 210$，與星與棒法的結果一致。（6 的分拆（partition）1, 1, 1, 1, 1, 1 需要六個數字，所以不會出現。）

驗算

- 星與棒法可重現第 (i) 部分的結果：差額總和為 2 時，得 $\binom{6}{4} = 15$。
- 極端情況同樣成立：差額總和為 0 時，得 $\binom{4}{4} = 1$ 個數（99999）；差額總和為 1 時，得 $\binom{5}{4} = 5$。
- 用電腦搜尋全部 90 000 個五位數，結果恰好有 15 個數的數字和為 43，210 個數的數字和為 39，而各種情況的分佈亦與上表相符。

常見錯誤

- 把 $\{8,8,9,9,9\}$ 當作一個數，或當作 5 個數：數字的次序是有分別的，共有 $\binom{5}{2} = 10$ 種排列。
- 忘記檢查首位數字。本題的首位不可能是 0，因為每個數字都至少是 3；但如果數字和較小（例如 20），星與棒法便會多算，這時必須剔除 $d_1 = 0$ 或有數字大於 9 的情況。

STEP 之外

把 n 寫成 k 個非負整數的有序和，方法的數目是 $\binom{n+k-1}{k-1}$，這也是 $(1 + x + x^2 + \cdots)^k$ 中 x^n 的係數（coefficient）。若限制每個數字最大為 9，上式便要換成 $(1 + x + \cdots + x^9)^k$，而截斷所帶來的影響可用容斥原理（inclusion–exclusion principle）處理。這些生成函數（generating function）方法是大學一年級組合數學（combinatorics）的基本內容；Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 和 Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 都是繼續探索數字與計數問題的好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。