詳細解答

STEP III 2004，第 9 題

力學 • 力矩與摩擦力

> **STEP III 2004，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/04-s3-q9

關鍵思路

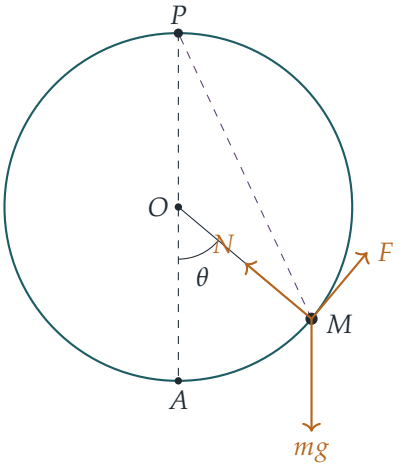
圓環的重量作用於轉軸正下方的 O，因此對 P 沒有力矩（moment）。除了轉軸處的反作用力之外，圓環所受的另一個力就只有老鼠施加的接觸力（contact force），所以圓環保持不動，當且僅當這個接觸力對 P 的力矩為零，也就是它的作用線（line of action）通過 P。整道題其實只在問：老鼠所受的接觸力何時可以沿 MP 的方向？這個問題要問兩次，一次求速率，一次求摩擦力的極限。

解答

模型

把老鼠視為質量為 m 的質點（particle），把圓環視為剛性（rigid）圓環（稍後可見它的質量並不影響結果），圓環可繞通過 P 的光滑水平軸自由轉動。設 $\theta = \angle AOM$，由向下的鉛垂線起量度，老鼠朝 θ 遞增的方向奔跑。圓環靜止時，老鼠在一個半徑為 a、圓心為 O 的固定圓上以恆定速率 u 運動。

老鼠所受的力有：重量 mg、圓環施加並指向 O 的法向反作用力（normal reaction）N，以及沿切線方向的摩擦力（friction）F，我們取 θ 遞增的方向（沿圓環向上）為正。



對老鼠沿切線方向（速率恆定，故沒有切向加速度）和沿半徑方向（加速度為 u^2/a，指向 O）分解：

$$F = mg\sin\theta,$$
$$N - mg\cos\theta = \frac{mu^2}{a}.$$

圓環何時處於平衡？

根據牛頓（Newton）第三定律，老鼠推圓環的力，與老鼠所受的接觸力（N 和 F）大小相等、方向相反。圓環的重量作用於 O，位於 P 的正下方，而轉軸的反作用力作用於 P，所以兩者對 P 都沒有力矩。因此，圓環保持平衡（equilibrium）且 POA 鉛垂，當且僅當接觸力對 P 的力矩為零，也就是它的作用線通過 P。

三角形 OPM 是等腰三角形（$OP = OM = a$），且 $\angle POM = \pi - \theta$，所以 $\angle OMP = \frac{1}{2}\theta$。於是直線 MP 與半徑 MO 的夾角為 $\frac{1}{2}\theta$，並偏向 θ 遞增的一方。因此，老鼠所受的接觸力沿 MP 的方向，當且僅當

$$\frac{F}{N} = \tan\tfrac{1}{2}\theta. \qquad (*)$$

（等價地，直接對 P 取力矩，老鼠施於圓環的力的力矩為 $a[N\sin\theta - F(1+\cos\theta)]$，而 $\sin\theta/(1+\cos\theta) = \tan\frac{1}{2}\theta$。）

想一想 怎樣把這個條件化為關於 u 的條件？

利用運動方程。老鼠所受的接觸力等於質量乘以加速度，再減去重量：

$$\mathbf{R} = m\cdot\frac{u^2}{a}\,\widehat{MO} + mg\,\hat{上}.$$

但 $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP} = a\,\widehat{MO} + a\,\hat{上}$，兩個係數相等。所以 $\mathbf{R}$ 平行於 MP 對每個 θ 都成

立，當且僅當 $u^2/a = g$，即

$$u = \sqrt{ag}.$$

用代數方法：當 $u^2 = ag$ 時，運動方程給出 $F = mg\sin\theta$ 和 $N = mg(1+\cos\theta)$，所以

$$\frac{F}{N} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta} = \tan\tfrac{1}{2}\theta,$$

這正是 $(*)$。對於一般的速率，對 P 的力矩算出來是 $m\sin\theta\,(u^2 - ag)$，它在每個位置都等於零，當且僅當 $u^2 = ag$。所以老鼠以速率 $\sqrt{ag}$ 奔跑，就能令圓環保持平衡，正如題目所要求，前提是圓環確實能夠提供所需的摩擦力。接下來我們就考察這一點。

摩擦力的極限

只有當 $|F| \le \mu N$ 時，老鼠的腳才能抓緊而不打滑。取 $u = \sqrt{ag}$，並考慮圓環的下半部分，該處 $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$，故 $\cos\frac{1}{2}\theta > 0$，這個條件就是

$$\tan\tfrac{1}{2}|\theta| \le \mu \quad\Longleftrightarrow\quad |\theta| \le 2\arctan\mu.$$

所以在 $\angle AOM = 2\arctan\mu$ 之前，一切都行得通。（只有當 $\mu < 1$ 時，這一點才位於圓環的下半部分；若 $\mu \ge 1$，老鼠永遠到不了這一點。）

過了這一點，無論選甚麼速率都無補於事。平衡需要 $F/N = \tan\frac{1}{2}\theta > \mu$，而摩擦力無法做到。不論速率是多少，只要摩擦力滿足 $|F| \le \mu N$，老鼠施於圓環的力對 P 的力矩都是

$$a[N\sin\theta - F(1+\cos\theta)] \;\ge\; aN(1+\cos\theta)(\tan\tfrac{1}{2}\theta - \mu) > 0.$$

會發生甚麼事

老鼠一旦越過 $\angle AOM = 2\arctan\mu$，就再也抓不夠緊。牠的腳開始打滑，摩擦力降至極限值（limiting value）μN，老鼠無法維持原有速率：牠開始向後滑。這時牠施於圓環的接觸力從 P 的旁邊經過，因而力矩不為零，圓環不再處於平衡。圓環開始繞 P 轉動。上面那個力矩的方向表明，老鼠的法向推力勝過已減弱的摩擦力，所以圓環擺動時，A 會移向老鼠所在的一側，也就是老鼠原本奔跑的方向。從這一刻起，運動不再是簡單的平衡情況：圓環繞 P 擺動，而老鼠則在圓環上滑動。

驗算

- 當 $\theta = 0$ 時，老鼠位於 A，接觸力 $N = 2mg$ 是鉛垂的，並通過 P，而且不需要摩擦力，與預期相符。
- 速率 $\sqrt{ag}$ 具有速率的單位，既不取決於 μ，也不取決於圓環的質量，而且它令法向反作用力等於 $mg(1+\cos\theta)$，在整個下半部分都是正數。

- 當 $\mu = 0.5$ 時，臨界角為 $2\arctan 0.5 \approx 0.927$ 弧度 $\approx 53.1°$。在該處 $\sin\theta = 0.8$，$1 + \cos\theta = 1.6$，所以 $F/N = 0.5 = \mu$，恰好相等。以 $u^2 = ag$ 在隨機位置對 P 的力矩作數值檢驗，結果為零，誤差在 $10^{-15}mga$ 以內。

常見錯誤

- 對 O 而不是對 P 取力矩。圓環是繞 P 轉動的，而法向反作用力（它通過 O）對 P 確實有力矩。
- 漏掉 N 中的向心（centripetal）項，結果得出 $N = mg\cos\theta$ 和錯誤的摩擦力條件。
- 聲稱老鼠只是「掉下來」。在下半部分，$N > 0$ 始終成立。失效的是抓地力，而不是接觸。

STEP 之外

這裏的巧妙之處在於：一個物體繞樞軸（pivot）處於平衡，當且僅當其餘各力的合力（resultant）通過樞軸。「作用線通過 P」這個論證，省去了一整頁的分解計算。題目的後半部分則讓人初嘗耦合系統（coupled systems）的滋味：打滑的接觸把一個物體的運動傳到另一個物體上。要分析打滑之後的運動，就需要圓環的轉動慣量（moment of inertia）和完整的剛體轉動方程。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）正是以這種風格講解繞固定軸的力矩（torque）和受摩擦力限制的運動。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。