詳細解答

STEP III 2004，第 8 題

純數學 • 微分方程

> **STEP III 2004，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/04-s3-q8

關鍵思路

由於有 $1/y$ 這一項，方程對 y 而言並非線性（linear）。但把方程兩邊同乘 y 後，$y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 就變成 y^2 的導數的一半，而 $1/y$ 項則變成純粹是 x 的函數。因此以 $u = y^2$ 表示時，方程是線性的（這是一條伯努利型（Bernoulli type）方程），再用積分因子（integrating factor）便可完成求解。三條曲線都是圓錐曲線（conics），辨認出它們之後，作圖就很容易。

解答

代換

設 $u = y^2$。由鏈式法則（chain rule），

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y\left(f(x)\,y + \frac{g(x)}{y}\right) = 2f(x)\,y^2 + 2g(x).$$

以 u 取代 y^2，

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - 2f(x)\,u = 2g(x),$$

這對 u 而言是線性的：u 和 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 都只以一次冪出現，而係數只取決於 x。這正是我們要證明的。

解方程

這裏 $f(x) = \frac{1}{x}$ 而 $g(x) = -1$，所以線性方程是

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \frac{2}{x}\,u = -2.$$

積分因子是 $\exp\left(-\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{e}^{-2\ln|x|} = \dfrac{1}{x^2}$。把方程兩邊同乘這個因子，

$$\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \frac{2}{x^3}u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2}.$$

積分後得 $\dfrac{u}{x^2} = \dfrac{2}{x} + C$，其中 C 為常數，所以通解（general solution）是

$$y^2 = 2x + Cx^2.$$

（原方程要求 $x \neq 0$ 及 $y \neq 0$，所以每個解都定義在一個不含 0 的 x 區間上，在該區間上 $2x + Cx^2 > 0$，而且 y 始終保持同一符號。）

三條曲線

三個點都滿足 $x > 0$ 及 $y > 0$，所以每條解曲線（solution curve）都是 $y^2 = 2x + Cx^2$ 在包含該點的正 x 區間上 $y > 0$ 的那一部分。

通過 $(1,1)$：$1 = 2 + C$，所以 $C = -1$，$y^2 = 2x - x^2$。配方後得

$$(x-1)^2 + y^2 = 1,$$

即圓心為 $(1,0)$、半徑為 1 的圓。解曲線是上半圓 $y = \sqrt{2x - x^2}$，其中 $0 < x < 2$。

通過 $(2,2)$：$4 = 4 + 4C$，所以 $C = 0$，$y^2 = 2x$：這是頂點在原點、對稱軸沿 x 軸的拋物線。解曲線是 $y = \sqrt{2x}$，其中 $x > 0$。

通過 $(4,4)$：$16 = 8 + 16C$，所以 $C = \frac{1}{2}$，$y^2 = 2x + \frac{1}{2}x^2$。配方後得 $\frac{1}{2}(x+2)^2 - y^2 = 2$，即

$$\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1,$$

這是一條雙曲線，中心為 $(-2,0)$，頂點為 $(0,0)$ 和 $(-4,0)$，漸近線（asymptotes）為 $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(x+2)$。解曲線是右支的上半部分，$y = \sqrt{2x + \frac{1}{2}x^2}$，其中 $x > 0$。

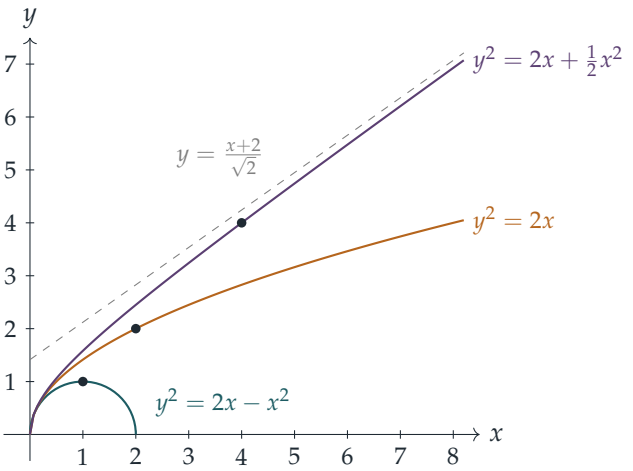
> ? **想一想** 為甚麼不包括雙曲線的左支，或者各曲線的下半部分？

微分方程的解必須在某個區間上可導，並在該區間上滿足方程，而方程在 $x = 0$ 或 $y = 0$ 時沒有定義。從 $(4,4)$ 出發向左走，曲線會到達 $(0,0)$，在那裏兩個條件都不成立，所以解不能延拓過這一點。左支（$x \leq -4$）和下半部分雖然滿足 $y^2 = 2x + \frac{1}{2}x^2$，但它們是另外的解，並不是通過 $(4,4)$ 的那一個。

略圖

三條曲線都從原點出發，在該處的切線是鉛垂的（在 $x = 0$ 附近，每條曲線的表現都近似 $y \approx \sqrt{2x}$），而在所給各點的斜率分別是 $\frac{1}{1} - \frac{1}{1} = 0$、$\frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 和 $\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$。

當 x 較大時，圓會回落到 $(2,0)$，拋物線按 $\sqrt{x}$ 的速度增長，而雙曲線則趨近其漸近線 $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+2)$。由於當 $x>0$ 時 $2x-x^2<2x<2x+\frac{1}{2}x^2$，圓位於拋物線之下，而拋物線又位於雙曲線之下。



驗算

- 代回原方程：若 $y^2=2x+Cx^2$，則 $2yy'=2+2Cx$，所以 $y'=\frac{1+Cx}{y}$，而 $\frac{y}{x}-\frac{1}{y}=\frac{y^2-x}{xy}=\frac{x+Cx^2}{xy}=\frac{1+Cx}{y}$。兩者一致。
- 用數值方法（龍格－庫塔法（Runge–Kutta））對原方程由 $(4,4)$ 逐步計算至 $x=8$，得 $y\approx 6.92820$，與 $\sqrt{16+32}=\sqrt{48}$ 吻合；由 $(1,1)$ 和 $(2,2)$ 出發作類似計算，結果與半圓和拋物線吻合，誤差約為 10^{-12}。

常見錯誤

- 把積分因子寫成 x^2 而不是 x^{-2}：u 的係數是 $-\frac{2}{x}$，所以指數是 $-2\ln x$。
- 漏掉 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 中的因子 2，結果得出 $y^2=x+Cx^2$；這通不過代回原方程的驗算。
- 把整個圓、拋物線的上下兩半或雙曲線的兩支都畫出來，當作「解曲線」。

STEP 之外

這裏的技巧適用於任何*伯努利方程* (Bernoulli equation) $y'=f(x)y+g(x)y^n$：代換 $u=y^{1-n}$ 總能把它化為線性方程(這裏 $n=-1$，所以 $u=y^2$)。在 $x=0$ 和 $y=0$ 處所需的謹慎，讓我們初次窺見存在與唯一性定理 (existence and uniqueness theorem)：凡在右邊

表現良好的點，都有且僅有一個解通過，而曲線族只能在右邊表現不良好的點相交，正如我們的所有曲線都在原點相交一樣。Boyce 與 DiPrima 所著的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科書）涵蓋了伯努利方程和這個定理。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。