詳細解答

STEP III 2004，第 7 題

純數學 • 歸約公式

> **STEP III 2004，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/04-s3-q7

關鍵思路

I_{n+1} 的被積函數（integrand）等於 I_n 的被積函數乘以 $\frac{t}{t+1}$，所以只要估計這一個因子的上界（upper bound），就能得到聯繫相鄰兩個積分的不等式。分部積分法（integration by parts）也給出一個精確的關係式；把不等式與等式並排放在一起，就能擠出一個只涉及 I_n 的上界。這個精確的關係式可以逐項相消（telescope），一直化到 I_1，而它是我們熟悉的對數；於是整件事就變成 $\ln 2$ 的一個級數（series），而且誤差項在我們掌握之中。

解答

不等式 $I_{n+1} < \frac{1}{2} I_n$

在 $0 \le t \le 1$ 上，

$$\frac{t}{t+1} = 1 - \frac{1}{t+1},$$

它隨 t 遞增，所以最大值是 $\frac{1}{2}$，而且只在 $t = 1$ 時取得。現在把 I_{n+1} 的被積函數寫成

$$\frac{t^n}{(t+1)^{n+1}} = \frac{t}{t+1} \cdot \frac{t^{n-1}}{(t+1)^n}.$$

因此

$$\frac{1}{2} I_n - I_{n+1} = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{t+1} \right) \frac{t^{n-1}}{(t+1)^n} \, \mathrm{d}t.$$

這裏的被積函數是連續（continuous）的，永不為負，而且在 $0 < t < 1$ 時嚴格為正（兩個因子在該處均為正）。所以這個積分嚴格為正，即 $I_{n+1} < \frac{1}{2} I_n$。

? **想一想** 既然 $\frac{t}{t+1}$ 確實會達到 $\frac{1}{2}$，為甚麼不等式仍然是嚴格的？

它只在 $t = 1$ 這一點達到 $\frac{1}{2}$。一個連續的非負函數，只要在整個區間上為正，其積分就是正數，所以單單一點取等號並無影響。

遞推關係

對 I_{n+1} 作分部積分，取 $u = t^n$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (t+1)^{-(n+1)}$，於是 $v = -\dfrac{1}{n(t+1)^n}$（因為 $n \geq 1$，此式成立）：

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \Big[-\frac{t^n}{n(t+1)^n}\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{nt^{n-1}}{n(t+1)^n}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{n\,2^n} + I_n, \end{aligned}$$

這是因為方括號內的式子在 $t = 1$ 時等於 $-\frac{1}{n2^n}$，在 $t = 0$ 時等於 0。這就是所要求的結果，即題目中的遞推關係（recurrence）。

I_n 的上界

把遞推關係代入不等式：

$$I_n - \frac{1}{n\,2^n} = I_{n+1} < \frac{1}{2}I_n \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{2}I_n < \frac{1}{n\,2^n} \quad\Longrightarrow\quad I_n < \frac{1}{n\,2^{n-1}}.$$

$\ln 2$ 的級數

首先，

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = [\ln(t+1)]_0^1 = \ln 2.$$

遞推關係指出，對每個 $r \geq 1$ 都有 $I_r - I_{r+1} = \dfrac{1}{r\,2^r}$。把 $r = 1, \ldots, n$ 的各式相加，左邊逐項相消：

$$I_1 - I_{n+1} = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r\,2^r}, \qquad \text{所以} \qquad \ln 2 = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r\,2^r} + I_{n+1}.$$

上下界 $\frac{2}{3} < \ln 2 < \frac{17}{24}$

關於餘項（remainder），我們知道兩件事：$I_{n+1} > 0$，因為它的被積函數在 $(0,1]$ 上為正；以及 $I_{n+1} < \dfrac{1}{(n+1)2^n}$，這是把上文的上界中的 n 換成 $n+1$ 而得。所以對每個 n，

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r\,2^r} < \ln 2 < \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r\,2^r} + \frac{1}{(n+1)2^n}.$$

部分和（partial sums）依次為

$$\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}, \qquad \frac{5}{8} + \frac{1}{24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}.$$

想一想 求上界和下界時，各應取哪個 n 值？

兩者並不相同。求下界（lower bound）時取 $n=3$：$\ln 2 > \frac{2}{3}$。求上界時取 $n=2$，此時誤差的上界是 $\frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{12}$：

$$\ln 2 < \tfrac{5}{8} + \tfrac{1}{12} = \tfrac{15}{24} + \tfrac{2}{24} = \tfrac{17}{24}.$$

合起來便得 $\frac{2}{3} < \ln 2 < \frac{17}{24}$，正是所求。

驗算

以數值計算，$\ln 2 \approx 0.6931$，確實介乎 $\frac{2}{3} \approx 0.6667$ 與 $\frac{17}{24} \approx 0.7083$ 之間。用辛普森法則（Simpson's rule）可得 $I_3 \approx 0.0681$，明顯小於上界 $\frac{1}{12} \approx 0.0833$，而且 $\frac{5}{8} + 0.0681 = 0.6931$ 亦確實成立。我們也用數值方法驗算了遞推關係和兩個不等式，n 的取值直至 24。

常見錯誤

- 求上下界時用同一個 n：取 $n=3$ 會得到上界 $\frac{2}{3} + \frac{1}{32} = \frac{67}{96}$，這個上界是對的，而且更精確，但並不是題目要求的 $\frac{17}{24}$。
- 分部積分時弄錯邊界項的正負號；v 是負的。
- 忘記說明為甚麼 $I_{n+1} > 0$，而嚴格的下界正需要這一點。

STEP 之外

這就是級數 $\ln 2 = \sum_{r\geq 1} \frac{1}{r2^r}$，亦即 $-\ln(1-x) = \sum x^r/r$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 時的情況，並且附有取 n 項之後餘項的明確上界。用積分來估計餘項，正是帶積分餘項的泰勒定理（Taylor's theorem）的做法，那是大學一年級分析課的基本內容。關於冪級數（power series）及其餘項的理論，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。