詳細解答

STEP III 2004，第 6 題

純數學 • 遞推關係

> **STEP III 2004，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/04-s3-q6

關鍵思路

F_n 這個式子是附在數列每一對相鄰兩項上的量，而開首的恆等式（identity）正好告訴我們，由一對相鄰項到下一對時，它在甚麼情況下保持不變。對於 (i) 中的遞推關係（recurrence），第二個因式為零，所以 F_n 是一個不變量（invariant），我們只需求出它在起點的值。第 (ii) 部分把論證倒過來做：若 F_n 是常數，乘積必定為零，所以每一步兩個因式之中總有一個是零。於是每一步都有一個選擇，而週期（period）為 4 的數列（sequence）就是靠選得巧妙而得出的。

解答

恆等式

把兩項都寫出來，w_{n-1}^2 項互相抵消：

$$\begin{aligned} F_n - F_{n-1} &= (w_n^2 + w_{n-1}^2 - 4w_n w_{n-1}) - (w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2 - 4w_{n-1}w_{n-2}) \\ &= (w_n^2 - w_{n-2}^2) - 4w_{n-1}(w_n - w_{n-2}) \\ &= (w_n - w_{n-2})(w_n + w_{n-2}) - 4w_{n-1}(w_n - w_{n-2}) \\ &= (w_n - w_{n-2})(w_n + w_{n-2} - 4w_{n-1}), \end{aligned}$$

此式對 $n \geq 2$ 成立（因為需要 w_{n-2} 存在），正是所求。

還有一點觀察，往後會一直用到：F_n 對 w_n 和 w_{n-1} 是對稱（symmetric）的。把兩者對調，$w_n^2 + w_{n-1}^2 - 4w_n w_{n-1}$ 保持不變。

第 (i) 部分

取 $w_n = u_n$，並設 F_n 為相應的量。當 $n \geq 2$ 時，遞推關係給出 $u_n + u_{n-2} - 4u_{n-1} = 0$，所以恆等式中的第二個因式為零，於是

$$F_n = F_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

因此對所有 $n \geq 1$ 都有 $F_n = F_1$，而

$$F_1 = u_1^2 + u_0^2 - 4u_1u_0 = 4 + 1 - 8 = -3.$$

所以 $u_n^2 + u_{n-1}^2 - 4u_nu_{n-1} = -3$，即對所有 $n \geq 1$ 都有 $u_n^2 + u_{n-1}^2 = 4u_nu_{n-1} - 3$，正是所求。（這個數列是 $1, 2, 7, 26, 97, \ldots$。）

第 (ii)(a) 部分

把 $n = 1$ 和 $v_0 = 1$ 代入 $(*)$：

$$v_1^2 + 1 = 4v_1 - 3 \iff v_1^2 - 4v_1 + 4 = 0 \iff (v_1 - 2)^2 = 0,$$

所以 $v_1 = 2$。這裏沒有選擇的餘地，因為它是重根（repeated root）。

現在取 $w_n = v_n$。條件 $(*)$ 說的正是：對所有 $n \geq 1$，$F_n = -3$。所以當 $n \geq 2$ 時，F_n 和 F_{n-1} 都等於 -3，由恆等式得

$$0 = F_n - F_{n-1} = (v_n - v_{n-2})(v_n + v_{n-2} - 4v_{n-1}).$$

兩個實數的乘積為零，僅當其中一個為零，所以 $v_n = v_{n-2}$ 或 $v_n = 4v_{n-1} - v_{n-2}$，正是所求。

想一想 這樣就完了嗎？兩個選項是否真的都給出合乎條件的下一項？

是的。固定 v_{n-1}，條件 $(*)$ 就是以 $x = v_n$ 為未知數的二次方程(quadratic)$x^2 - 4v_{n-1}x + (v_{n-1}^2 + 3) = 0$。我們知道 $x = v_{n-2}$ 是一個根，因為 F 是對稱的，而且 $F_{n-1} = -3$。兩根之和為 $4v_{n-1}$，所以另一個根是 $4v_{n-1} - v_{n-2}$。因此 (a) 中的兩個選項恰好就是這兩個根。每一步我們都可以任選其一，所得結果總是滿足 $(*)$。（當兩根重合時，例如 $n = 1$ 的情況，就只有一個選項。）

第 (ii)(b) 部分

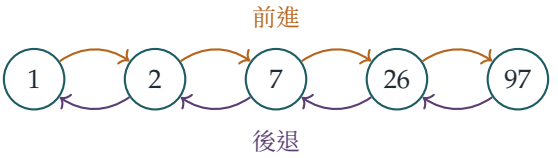
這裏 $v_0 = 1$，符合要求，而每一對相鄰項 (v_{n-1}, v_n) 不是 $(1, 2)$ 就是 $(2, 1)$。由於 F 是對稱的，兩者都給出

$$v_n^2 + v_{n-1}^2 - 4v_nv_{n-1} = 1 + 4 - 8 = -3,$$

所以 $(*)$ 對所有 $n \geq 1$ 成立。用 (a) 的說法，這個數列每一步都取 $v_n = v_{n-2}$ 這個選項。

第 (ii)(c) 部分

我們有 $v_0 = 1$ 和 $v_1 = 2$。由 (a)，其後每一項要麼等於前兩位的那一項（「後退」），要麼等於 $4\times$（前一項）$-$（再前一項）（「前進」）。由 $(1,2)$ 出發，前進得出 7，然後是 26、97，如此類推，這就是數列 u_n。後退則把最近一次前進抵消。



所以這個數列就是沿着這條鏈的一次遊走，由 1 出發，每次移到相鄰的一個數。由於 1 只有一個鄰居，遊走到達 1 之後必定立刻走到 2。

要在 $v_0 = 1$ 的情況下得到週期 4，我們需要 $v_4 = 1$。(b) 中週期為 2 的數列只是在 1 和 2 之間來回往返。要做出新的東西，我們多走一步：

$$v_0 = 1, \quad v_1 = 2, \quad v_2 = 4\cdot 2 - 1 = 7, \quad v_3 = v_1 = 2, \quad v_4 = v_2 \text{ 或 } 4\cdot 2 - 7 = 1.$$

選取 $v_4 = 1$，然後不斷重複，得出

$$v_n = \begin{cases} 1 & n \equiv 0 \pmod 4, \\ 2 & n \text{ 為奇數}, \\ 7 & n \equiv 2 \pmod 4, \end{cases} \qquad \text{即} \quad 1,2,7,2,1,2,7,2,\ldots$$

直接驗證 $(*)$：每一對相鄰項都是 $(1,2)$、$(2,7)$、$(7,2)$ 或 $(2,1)$。由對稱性，我們只需驗證

$$1 + 4 - 8 = -3 \quad \text{和} \quad 4 + 49 - 56 = -3,$$

兩式都成立。所以 $(*)$ 對所有 $n \geq 1$ 成立，而這個數列的週期為 4（而不是 2，因為 $v_2 \neq v_0$）。

事實上，週期恰好為 4 的答案只有這一個。在 1,2 之後，遊走必須有 $v_4 = 1$，所以它只能在 v_2 到達 7，然後必須立刻折返。

驗算

- 計算 u_n 直至 $n = 40$，確認每一次都有 $u_n^2 + u_{n-1}^2 - 4u_nu_{n-1} = -3$。例如 $(26,97)$：$676 + 9409 - 10088 = -3$。
- 用數以千計的隨機整數三元組檢驗開首的恆等式。
- 由 1,2 開始，列出 (a) 所容許的每一個數列，直至 v_8。當中自始至終滿足 $v_{k+4} = v_k$ 的只有 $1,2,1,2,\ldots$ 和 $1,2,7,2,\ldots$。

常見錯誤

- 在 (ii) 中斷定 $F_n - F_{n-1} = 0$ 卻沒有說明原因。原因是 $(*)$ 令每一個 F_n 都等於 -3。
- 忘記 v_1 是唯一確定的。該二次方程有重根 2，所以無需分情況討論。
- 在 (c) 中只檢查了一個週期之內的各對相鄰項，而忘記了「首尾相接」的那一對 $(v_3, v_4) = (2, 1)$。

STEP 之外

F_n 這個量是遞推關係的一個不變量：一個守恆量，就像力學中的能量。方程 $x^2 + y^2 - 4xy = -3$ 是一個馬爾可夫（Markov）型（或佩爾（Pell）型）的丟番圖方程（Diophantine equation）。把二次方程的一個根換成另一個根，即 $x \mapsto 4y - x$，正是經典的「韋達跳躍」（Vieta jumping）手法，它能由最小的解生成方程的全部整數解。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（高等算術）講述了佩爾方程，以及如何用遞推關係求出它的解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。