詳細解答

STEP III 2004，第 5 題

純數學 • 三角方程

> **STEP III 2004，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/04-s3-q5

關鍵思路

兩個餘弦值相等，當且僅當兩個角在相差一個正負號及 2π 的整數倍之下相同。改用正切（tangent）之後，用來區分 θ 與 $\theta+\pi$ 的資訊便會丟失，所以這個推論只在一個方向成立，而這正是反例（counterexample）的用意所在。在第 (i) 及 (ii) 部分，我們把 $a\cos x + b\sin x$ 寫成 $R\cos(x-\alpha)$ 的形式，利用第一個結果以 $\tan\omega$ 表示 $\tan x$，然後根據各角的大小選出正確的象限（quadrant）。

解答

開首的結果

若 $\cos(x-\alpha)=\cos\beta$，則對某個整數 n 有 $x-\alpha=\pm\beta+2n\pi$，因為餘弦是偶函數（even function），且週期（period）為 2π。所以

$$x=\alpha+\beta+2n\pi \quad \text{或} \quad x=\alpha-\beta+2n\pi.$$

由於 tan 的週期為 π，2π 當然也是它的週期，由此可得 $\tan x=\tan(\alpha+\beta)$ 或 $\tan x=\tan(\alpha-\beta)$（只要這些正切值有定義）。

逆命題（converse）不成立，因為 tan 的週期為 π，而 cos 卻不是。取 $\alpha=\beta=0$ 及 $x=\pi$。這時 $\tan x=0=\tan(\alpha+\beta)$，但

$$\cos(x-\alpha)=\cos\pi=-1\neq 1=\cos\beta.$$

一般而言，$x=\alpha+\beta+\pi$ 會給出 $\cos(x-\alpha)=-\cos\beta$。

關於 ω 有兩項事實稍後會用得着。由於 $\tan\omega=\frac{4}{3}$，我們有 $\cos\omega=\frac{3}{5}$ 及 $\sin\omega=\frac{4}{5}$。又

由於 $\frac{4}{3} > 1$，我們亦有 $\frac{\pi}{4} < \omega < \frac{\pi}{2}$。

第 (i) 部分

這裏 $\sqrt{1^2+7^2} = 5\sqrt{2}$，所以我們把等式兩邊除以 $5\sqrt{2}$：

$$\tfrac{1}{5\sqrt{2}}\cos x - \tfrac{7}{5\sqrt{2}}\sin x = \tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

設 φ 為滿足 $\cos\varphi = \frac{1}{5\sqrt{2}}$ 及 $\sin\varphi = \frac{7}{5\sqrt{2}}$ 的銳角（acute angle），於是 $\tan\varphi = 7$。方程變成

$$\cos(x+\varphi) = \cos\tfrac{\pi}{4},$$

這正是開首的結果中取 $\alpha = -\varphi$ 及 $\beta = \frac{\pi}{4}$ 的情況。利用 $\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$，

$$\tan(\alpha+\beta) = \tan(\tfrac{\pi}{4} - \varphi) = \frac{1-7}{1+7} = -\frac{3}{4},$$
$$\tan(\alpha-\beta) = -\tan(\varphi + \tfrac{\pi}{4}) = -\frac{7+1}{1-7} = \frac{4}{3}.$$

想一想 這兩個正切值各自對應 $[0, 2\pi]$ 內的兩個角，但方程在該範圍內只有兩個解。是哪兩個呢？

正如反例所示，單憑正切值無法判斷，所以我們回到 $x = \alpha \pm \beta + 2n\pi$，找出 $\alpha \pm \beta$ 實際上位於何處。由於 $\tan\varphi = 7 > 1$，我們有 $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$。

- $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} - \varphi$ 位於 $(-\frac{\pi}{4}, 0)$ 內，其正切值為 $-\frac{3}{4}$。而 $\tan(\frac{\pi}{2} - \omega) = \cot\omega = \frac{3}{4}$，且 $\frac{\pi}{2} - \omega \in (0, \frac{\pi}{4})$。因此 $\alpha + \beta = \omega - \frac{\pi}{2}$，加上 2π 便得 $x = \frac{3\pi}{2} + \omega$。
- $\alpha - \beta = -\varphi - \frac{\pi}{4}$ 位於 $(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2})$ 內，其正切值為 $\frac{4}{3}$。角 $\omega - \pi$ 同樣位於這個區間內，正切值亦為 $\frac{4}{3}$。在長度小於 π 且不包含漸近線（asymptote）的區間上，正切函數是一對一（one-to-one）的，所以 $\alpha - \beta = \omega - \pi$。加上 2π 便得 $x = \pi + \omega$。

由於 $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$，這兩個值都在 $[0, 2\pi]$ 內，而 n 取其他值時都不會得出此範圍內的值。因此

$$x = \pi + \omega \quad \text{或} \quad x = \tfrac{3\pi}{2} + \omega.$$

驗證一下：當 $x = \pi + \omega$ 時，$\cos x - 7\sin x = -\frac{3}{5} + \frac{28}{5} = 5$；當 $x = \frac{3\pi}{2} + \omega$ 時，$\cos x = \sin\omega$ 及 $\sin x = -\cos\omega$，由此得 $\frac{4}{5} + \frac{21}{5} = 5$。

第 (ii) 部分

這裏 $\sqrt{2^2+11^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$，所以

$$\tfrac{2}{5\sqrt{5}}\cos x + \tfrac{11}{5\sqrt{5}}\sin x = \tfrac{2}{\sqrt{5}}.$$

設 α 為銳角，滿足 $\cos\alpha = \frac{2}{5\sqrt{5}}$ 及 $\sin\alpha = \frac{11}{5\sqrt{5}}$，於是 $\tan\alpha = \frac{11}{2}$。設 β 為銳角，滿足 $\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$，於是 $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ 及 $\tan\beta = \frac{1}{2}$。方程就是 $\cos(x-\alpha) = \cos\beta$，而

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\frac{11}{2} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{11}{4}} = \frac{5}{15/4} = \frac{4}{3},$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\frac{11}{2} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{11}{4}} = \frac{6}{-7/4} = -\frac{24}{7}.$$

第二個值就是 $\tan 2\omega$，因為

$$\tan 2\omega = \frac{2\cdot\frac{4}{3}}{1 - \frac{16}{9}} = \frac{8/3}{-7/9} = -\frac{24}{7}.$$

我們再次確定各角的位置。α 和 β 都是銳角，所以

- $\alpha - \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，正切值為 $\frac{4}{3}$，所以 $\alpha - \beta = \omega$；
- $\alpha + \beta \in (0, \pi)$，正切值為負，所以它位於 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 內。由於 $\frac{\pi}{4} < \omega < \frac{\pi}{2}$，角 2ω 同樣位於 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 內，且正切值相同，所以 $\alpha + \beta = 2\omega$。

ω 和 2ω 都在 $[0, 2\pi]$ 內，而加上 $\pm 2\pi$ 便會超出這個範圍。因此方程的解為

$$x = \omega \quad 及 \quad x = 2\omega,$$

其中一個解是另一個的兩倍，正如題目所求。直接驗算：$x = \omega$ 給出 $\frac{6}{5} + \frac{44}{5} = 10$。當 $x = 2\omega$ 時，$\cos 2\omega = \frac{9-16}{25} = -\frac{7}{25}$ 及 $\sin 2\omega = \frac{24}{25}$，由此得 $-\frac{14}{25} + \frac{264}{25} = 10$。

驗算

- 每條方程在 $[0, 2\pi]$ 內應該恰好有兩個根，因為 $5 < 5\sqrt{2}$ 及 $10 < 5\sqrt{5}$，所以右邊的值嚴格介乎 $-R$ 與 R 之間。
- 以數值計算，$\omega \approx 0.9273$。用變號搜尋法可找到 (i) 的根為 4.0689 及 5.6397，即 $\pi + \omega$ 及 $\frac{3\pi}{2} + \omega$。對於 (ii)，則找到 0.9273 及 1.8546，即 ω 及 2ω。

常見錯誤

- 解 $\tan x = \frac{4}{3}$ 或 $\tan x = -\frac{3}{4}$，然後把 $[0, 2\pi]$ 內的四個角全部列出。其中兩個是增根，原因正是反例所揭示的那一點。
- 在 (i) 中把 φ 的正負號弄錯，例如把 $\cos x - 7\sin x$ 寫成 $\cos(x - \varphi)$ 而不是 $\cos(x + \varphi)$。

STEP 之外

這裏的困難在於 tan 不是單射（injective），所以「$\tan x = \tan y$」只能告訴你 x 模 π 的值。在複分析（complex analysis）中，同樣的問題出現在輻角（argument）以及 $\log z$ 的分支（branch）的定義之中：在那裏，角只能確定到相差 2π 的整數倍。在這個框架下，$a\cos x + b\sin x = \mathrm{Re}\left((a - \mathrm{i}b)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)$，而 R 和 α 不過是 $a + \mathrm{i}b$ 的模（modulus）和輻角。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）把這種幾何觀點闡述得十分精彩。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。