詳細解答

STEP III 2004，第 4 題

純數學 • 相切圓與級數

STEP III 2004，第 4 題

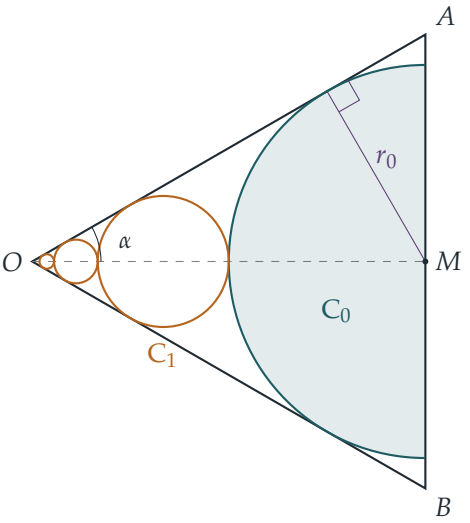
繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/04-s3-q4

關鍵思路

凡是同時與 OA 和 OB 相切的圓，圓心都在角 AOB 的角平分線（angle bisector）上，而圓心與 O 的距離由半徑決定：在 O 處夾角為 α 的直角三角形給出距離 $= r/\sin\alpha$。把「兩圓相切」寫成關於這些距離的方程，便把相鄰的半徑聯繫起來，從而得知各半徑構成等比數列（geometric progression）。於是各面積構成等比級數（geometric series），而最後一部分是單變量的求極大值問題（或者選一個合適的 α 值即可）。

解答



半徑之比

設 M 為 AB 的中點。由於 $OA = OB$，直線 OM 平分角 AOB，並且垂直於 AB；角 AOM 和角 BOM 各為 α。

任取一個半徑為 r、同時與直線 OA 和 OB 相切的圓。它的圓心與這兩條直線等距，所以位於角平分線 OM 上。設圓心為 P，圓與 OA 相切於 T，則 $PT \perp OA$，$PT = r$，且角 $POT = \alpha$，所以在直角三角形 OTP 中

$$OP = \frac{r}{\sin\alpha}.$$

這個結果適用於 C_0（圓心為 M），也適用於每一個 C_n。記 $d_n = r_n/\sin\alpha$ 為 O 到 C_n 圓心的距離。

圓 C_{n+1} 位於 C_n 與 O 之間的角落裏（它必定在角的內部，並在 C_n 靠近 O 的一側，因為它與邊 OA 和 OB 相切，而不是與它們的延長線相切）。兩圓外切（touch externally）時，圓心相距 $r_n + r_{n+1}$，而這裏兩個圓心都在 OM 上，所以

$$d_n - d_{n+1} = r_n + r_{n+1}.$$

代入 $d_n = r_n/\sin\alpha$，再乘以 $\sin\alpha$：

$$\begin{aligned} r_n - r_{n+1} &= (r_n + r_{n+1})\sin\alpha \\ r_n(1-\sin\alpha) &= r_{n+1}(1+\sin\alpha), \end{aligned}$$

因此

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha},$$

這正是所要證明的結果。$n = 0$ 時這個論證同樣成立：C_1 與半圓的弧形部分相切，而這部分正是 C_0 面向 O 的那一半。

總面積

記 $k = \dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$。由於 $0 < \sin\alpha < 1$，我們有 $0 < k < 1$，且 $r_n = k^n r_0$。半圓的面積為 $\frac{1}{2}\pi r_0^2$，而 C_n 的面積為 $\pi k^{2n} r_0^2$。級數 $\sum_{n\geq 1} k^{2n}$ 是公比為 $k^2 < 1$ 的等比級數，所以它收斂（converge）於 $k^2/(1-k^2)$。於是

$$S = \pi r_0^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{k^2}{1-k^2}\right).$$

現在

$$1 - k^2 = \frac{(1+\sin\alpha)^2 - (1-\sin\alpha)^2}{(1+\sin\alpha)^2} = \frac{4\sin\alpha}{(1+\sin\alpha)^2}, \qquad \text{所以} \qquad \frac{k^2}{1-k^2} = \frac{(1-\sin\alpha)^2}{4\sin\alpha}.$$

因此

$$S = \pi r_0^2 \frac{2\sin\alpha + 1 - 2\sin\alpha + \sin^2\alpha}{4\sin\alpha} = \frac{1+\sin^2\alpha}{4\sin\alpha}\pi r_0^2,$$

這就是我們要的結果。

與三角形比較

由第一部分，$OM = d_0 = r_0/\sin\alpha$。在直角三角形 OMA 中，$AM = OM\tan\alpha$，所以三角形 OAB 的面積為

$$T = OM \cdot AM = OM^2\tan\alpha = \frac{r_0^2}{\sin^2\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{r_0^2}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

（半圓確實放得進底邊上：$r_0 = OM\sin\alpha < OM\tan\alpha = AM$。）兩式相除，得

$$\frac{S}{T} = \frac{\pi}{4}(1+\sin^2\alpha)\cos\alpha.$$

想一想 我們應該試哪一個 α 值？

當 $\alpha \to 0$ 時，這個比趨向 $\pi/4 \approx 0.785$，僅僅略小於 0.8，所以非常瘦長的三角形並不可行。很自然的第一個嘗試，是令 O 處為直角，即 $\alpha = \pi/4$。這時 $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}$，$\cos\alpha = 1/\sqrt{2}$，所以

$$\frac{S}{T} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}}.$$

這個值大於 $\frac{4}{5}$，當且僅當 $15\pi > 32\sqrt{2}$。兩邊均為正數，所以可以平方：條件變成 $225\pi^2 > 2048$，即 $\pi^2 > 9.102\ldots$。由於 $\pi > 3.1$，我們有 $\pi^2 > 9.61$，所以不等式成立。因此當 $\alpha = \pi/4$ 時（並且根據連續性（continuity），對所有接近 $\pi/4$ 的 α 亦然），這些圓覆蓋了三角形超過五分之四的面積。

順帶一提，最佳的 α 可由求 $f(c) = (2-c^2)c$ 的極大值得出，其中 $c = \cos\alpha$：$f'(c) = 2 - 3c^2 = 0$ 給出 $\cos\alpha = \sqrt{2/3}$，即 $\sin\alpha = 1/\sqrt{3}$，而這個比的極大值為 $\pi\sqrt{6}/9 \approx 0.855$。

驗算

- 當 $\alpha \to \pi/2$ 時，三角形變得扁平，且 $k \to 0$：各圓 C_n 消失，$S \to \frac{1}{2}\pi r_0^2$，與 $\frac{1+1}{4}\pi r_0^2$ 吻合。
- 取 $\alpha = \pi/6$，則 $k = \frac{1}{3}$，$S = \pi r_0^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1/9}{8/9}\right) = \frac{5}{8}\pi r_0^2$；公式給出 $\frac{1+1/4}{2}\pi r_0^2 = \frac{5}{8}\pi r_0^2$。
- 以數值方法驗證：對隨機選取的 α，直接按相切條件構造 3000 個圓，所得結果與兩條公式吻合，誤差約為 10^{-15}；而 $\alpha = \pi/4$ 時的比為 0.8330。

常見錯誤

- 把 C_0 當作整個圓來計算：它是半圓，這正是 $\frac{1}{2}$ 出現的原因。
- 使用 $d_n + d_{n+1} = r_n + r_{n+1}$ 或 $d_n - d_{n+1} = r_n - r_{n+1}$：這些圓是外切的，而且兩個圓心都在 O 的同一側。
- 在最後一部分嘗試很小的 α：這時比趨向 $\pi/4 < \frac{4}{5}$。

STEP 之外

這一串圓是由單一個以 O 為中心、比例因子為 k 的位似變換（dilation，即放大 enlargement）生成的：它把角落區域映射到自身，並把每個圓映射到下一個圓。這類自相似（self-similar）的構形通向分形（fractal）和阿波羅尼奧斯圓填充（Apollonian circle packing），其中互相相切的圓的曲率（curvature）滿足笛卡兒圓定理（Descartes' circle theorem）。反演（inversion）是一種把圓變成直線的變換，能令許多這類相切問題變得容易；Needham 的 *Visual Complex Analysis* 對此有精彩的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。