詳細解答

STEP III 2004，第 3 題

純數學 • 凸性與級數的界限

STEP III 2004，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/04-s3-q3

關鍵思路

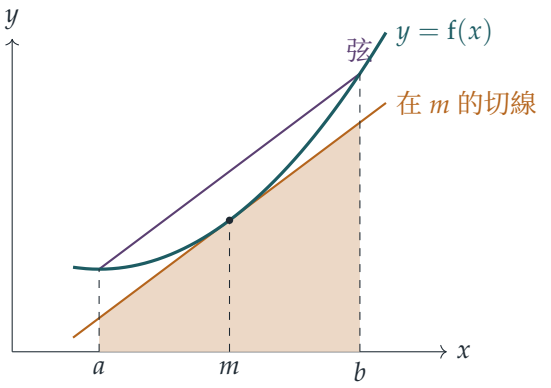
若 $\mathrm{f}'' > 0$，曲線向上彎。因此曲線位於每一條切線（tangent）之上，亦位於每一條弦（chord）之下。在中點的切線，以及連接兩端的弦，各自截出一個梯形（trapezium），其面積很容易寫出，而這兩個面積把積分夾在中間。取 $\mathrm{f}(x) = 1/x^2$ 及區間 $[n-1, n]$，積分便會裂項相消（telescope）。再把各不等式對 n 相加，便得出 $\sum 1/n^2$ 的上下界。

解答

積分的兩個界

設 $m = \frac{1}{2}(a+b)$。由於在 $[a,b]$ 上 $\mathrm{f}'' > 0$，斜率 f' 嚴格遞增，所以曲線是凸的（convex）。由此得到兩個事實。

- *曲線位於它在 m 的切線之上。*設 $t(x) = \mathrm{f}(m) + \mathrm{f}'(m)(x-m)$ 及 $g = \mathrm{f} - t$。則 $g(m) = g'(m) = 0$，且 $g'' = \mathrm{f}'' > 0$，所以 g' 遞增。因此在 m 的左邊 $g' < 0$，在右邊 $g' > 0$，故 g 在 m 取得嚴格極小值 0，而當 $x \neq m$ 時 $\mathrm{f}(x) > t(x)$。
- *曲線位於它的弦之下。*設 $c(x)$ 為通過 $(a, \mathrm{f}(a))$ 和 $(b, \mathrm{f}(b))$ 的直線，並設 $h = \mathrm{f} - c$。則 $h(a) = h(b) = 0$ 且 $h'' > 0$。假如 h 在 (a,b) 內取得某個 ≥ 0 的值，它便會在該區間內有一個極大值，而在該處 $h'' \leq 0$，這是不可能的。所以當 $a < x < b$ 時 $\mathrm{f}(x) < c(x)$。



現在比較 $[a,b]$ 上的面積。切線下的面積是一個闊度為 $b-a$ 的梯形。它的平均高度就是 t 在中點的高度 $t(m)=\mathrm{f}(m)$，所以面積是 $(b-a)\,\mathrm{f}(m)$（陰影部分）。弦下的面積是一個梯形，兩條平行邊的長度為 $\mathrm{f}(a)$ 和 $\mathrm{f}(b)$，所以面積是 $(b-a)\frac{1}{2}\big(\mathrm{f}(a)+\mathrm{f}(b)\big)$。除了個別孤立點外，曲線嚴格位於兩條直線之間。所以

$$(b-a)\,\mathrm{f}\Big(\frac{a+b}{2}\Big) < \int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x < (b-a)\,\frac{\mathrm{f}(a)+\mathrm{f}(b)}{2}.$$

（草圖所示的 f 是正的。但論證其實只用到 $\int(\mathrm{f}-t)>0$ 和 $\int(c-\mathrm{f})>0$，所以 f 的正負並無影響。）

選取 a、b 和 f

中間的一項 $\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$ 看來像 $\big[-\frac{1}{x}\big]_{n-1}^{n}$，所以取 $\mathrm{f}(x)=1/x^2$、$a=n-1$、$b=n$。於是 $b-a=1$，而且因為 $n-1\geq 1>0$，在 $[n-1,n]$ 上有 $\mathrm{f}''(x)=6/x^4>0$。此外

$$\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n},\qquad \mathrm{f}\Big(\frac{2n-1}{2}\Big)=\frac{4}{(2n-1)^2},$$

所以由第一部分得

$$\frac{4}{(2n-1)^2} < \frac{1}{n-1}-\frac{1}{n} < \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n-1)^2}\Big)\qquad (n\geq 2),$$

這正是所要證明的。

推導關於 1 的兩個界

設 $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$。這個級數收斂（converge），因為當 $n\geq 2$ 時有 $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$，而這些項會裂項相消。把 $n=2,3,\ldots,N$ 的不等式相加。中間各項裂項相消後得 $1-\frac{1}{N}$，它趨向 1。

? **想一想** 當我們令 $N\to\infty$ 時，嚴格不等式通常會變成 $\leq$。怎樣才能保持嚴格？

看看當中的差距。對每個 $n \geq 2$，差距 $d_n = \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) - \frac{4}{(2n-1)^2}$ 是正數。所以這些差距的無窮和至少等於它的第一項，即 $d_2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18} > 0$。這裏每個級數都收斂，所以可以逐項求和，而兩個和之差嚴格為正。同樣的論證亦適用於右邊的不等式。

在左邊，$n = 2, 3, 4, \ldots$ 給出 $2n - 1 = 3, 5, 7, \ldots$，所以

$$4\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right) < 1.$$

在右邊，

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2}\right) = \frac{1}{2}(S-1) + \frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + (S-1),$$

由此得

$$1 < \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right).$$

與奇數平方作比較

把左邊的級數每兩個相鄰的項分成一組，每組先是一個奇數項，然後是一個偶數項。對 $k \geq 2$，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{(2k)^2}\right) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{(2k-1)^2}\right) = \frac{1}{(2k-1)^2},$$

因為 $2k > 2k - 1 > 0$。取 $k = 2, 3, 4, \ldots$，左邊的各組是 $(3^2, 4^2)$、$(5^2, 6^2), \ldots$，合起來剛好把 $\frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{5^2}, \ldots$ 每一項各用一次。（可以這樣分組，是因為所有項都是正數，而且級數收斂。）右邊則是 $\frac{1}{3^2}, \frac{1}{5^2}, \ldots$。對 k 求和，並如前所述保持嚴格不等，便得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots\right) < \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots.$$

S 的上下界

下界（*lower bound*）。由右邊的不等式，$1 < \frac{1}{2} + (S-1)$，所以 $S > \frac{3}{2}$。

上界（*upper bound*）。設 $T = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = S - 1 - \frac{1}{4}$。把剛才的比較與左邊的不等式結合，得

$$\frac{1}{2}T < \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots < \frac{1}{4},$$

所以 $T < \frac{1}{2}$。因此 $S = 1 + \frac{1}{4} + T < \frac{7}{4}$。總括而言，

$$\frac{3}{2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{7}{4}.$$

驗算

▶ 真確值是 $S = \pi^2/6 \approx 1.6449$，位於 $(1.5, 1.75)$ 之內。

- 數值上，$4\sum_{k\geq 2}(2k-1)^{-2} = 4(\pi^2/8-1) \approx 0.935 < 1$，而 $\frac{1}{2}+(S-1) \approx 1.145 > 1$。
- 至於那個比較，$\frac{1}{2}T \approx 0.197 < 0.234 \approx \sum_{k\geq 2}(2k-1)^{-2}$。
- 試代 $n=2$：$\frac{4}{9} \approx 0.444 < \frac{1}{2} < \frac{5}{8} = 0.625$。以精確分數對 $2 \leq n \leq 2000$ 逐一檢查，三個不等式全部成立。

常見錯誤

- 忘記了缺少的 $\frac{1}{4}$：括號由 $\frac{1}{3^2}$ 開始，所以 $T = S - \frac{5}{4}$，而不是 $S-1$。若用 $S-1$，便會得出 $S < \frac{3}{2}$ 這個錯誤結論。
- 把不等號的方向弄反。對於向上彎的曲線，切線（中點）估算偏小，而弦（梯形）估算偏大。
- 過渡到無窮和時，不加說明便保留「$<$」，沒有解釋為何它取極限後仍然成立。

STEP 之外

這兩個界就是中點法則（midpoint rule）和梯形法則（trapezium rule）。凸性告訴你每個法則的誤差偏向哪一邊，而泰勒定理（Taylor's theorem）則顯示兩者的誤差都以 $(b-a)^3$ 的速度縮小。精確值 $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$ 是歐拉（Euler）對巴塞爾問題（Basel problem）的解答。大學的第一門分析課程會用傅立葉級數（Fourier series）證明它，也會把「嚴格不等式取極限」這一步嚴謹化。Abbott 的 *Understanding Analysis* 涵蓋了級數的收斂和凸函數這兩個課題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。