詳細解答

STEP III 2004，第 2 題

純數學 • 漸近線與曲線描繪

STEP III 2004，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/04-s3-q2

關鍵思路

把 $f(x)$ 寫成直線 $y = x - 4$ 加上一個修正項。修正項的分子是完全平方（perfect square），所以它在某一點處有二重零點，而這個二重零點正正就是相切（tangency）的意思。至於 $f(x) = 0$ 的根，只要消去分母，便會得到一個平方差（difference of two squares），可以立即因式分解。

解答

在整個解答中，記

$$f(x) = (x-4) - \frac{16(2x+1)^2}{x^2(x-4)}.$$

第 (i) 部分

分母在 $x = 0$ 和 $x = 4$ 處為零。分子 $16(2x+1)^2$ 在這兩處都不為零，所以垂直漸近線（vertical asymptote）是

$$x = 0 \qquad 及 \qquad x = 4.$$

當 $|x|$ 很大時，分式的分子是二次式，分母是三次式：

$$\frac{16(2x+1)^2}{x^2(x-4)} = \frac{64x^2+64x+16}{x^3-4x^2} \approx \frac{64}{x} \to 0 \quad 當 x \to \pm\infty,$$

所以 $f(x) - (x-4) \to 0$，而斜漸近線（oblique asymptote）是

$$y = x - 4.$$

想一想 漸近線怎可能同時又是切線（tangent）？

漸近線只描述曲線在遠處的情況，所以沒有甚麼會阻止這條直線同時在某個有限的點與曲線相切。要找出直線與曲線的交點，設 $\mathrm{f}(x) = x - 4$：

$$\mathrm{f}(x) - (x-4) = -\frac{16(2x+1)^2}{x^2(x-4)} = 0 \iff x = -\tfrac{1}{2}.$$

由於因式 $(2x+1)$ 帶有平方，$x = -\frac{1}{2}$ 是 $\mathrm{f}(x) - (x-4) = 0$ 的二重根（double root）。這表示直線在該處與曲線相切。要直接驗證，設 $D(x) = \mathrm{f}(x) - (x-4) = (2x+1)^2\, h(x)$，其中 $h(x) = -16/(x^2(x-4))$。函數 h 在 $x = -\frac{1}{2}$ 附近可導（differentiable），所以

$$D'(x) = 4(2x+1)h(x) + (2x+1)^2 h'(x),$$

它在 $x = -\frac{1}{2}$ 處等於 0。因此 $\mathrm{f}'(-\frac{1}{2}) = 1$，即漸近線的斜率（gradient）。此外 $\mathrm{f}(-\frac{1}{2}) = -\frac{9}{2}$，這一點位於 $y = x - 4$ 上。所以斜漸近線就是曲線在 $(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2})$ 處的切線。

第 (ii) 部分

把所有項通分，公分母為 $x^2(x-4)$：

$$\mathrm{f}(x) = \frac{x^2(x-4)^2 - 16(2x+1)^2}{x^2(x-4)} = \frac{[x(x-4)]^2 - [4(2x+1)]^2}{x^2(x-4)}.$$

分子是一個平方差：

$$\begin{aligned}[x^2 - 4x - 4(2x+1)][x^2 - 4x + 4(2x+1)] &= (x^2 - 12x - 4)(x^2 + 4x + 4) \\ &= (x^2 - 12x - 4)(x+2)^2.\end{aligned}$$

所以

$$\mathrm{f}(x) = \frac{(x+2)^2(x^2 - 12x - 4)}{x^2(x-4)}.$$

因式 $(x+2)^2$ 顯示 $x = -2$ 是 $\mathrm{f}(x) = 0$ 的二重根，而且 $x = -2$ 並非分母的零點，正如題目所求。另外兩個根來自 $x^2 - 12x - 4 = 0$：

$$x = 6 \pm 2\sqrt{10} \approx 12.32,\ -0.32.$$

第 (iii) 部分

我們先整理繪畫草圖所需的各項特徵。

*在 $x = 0$ 附近。*當 $x \to 0$ 時，$\mathrm{f}(x) \approx -\dfrac{16}{x^2 \cdot (-4)} = \dfrac{4}{x^2}$，所以從兩側趨近時都有 $\mathrm{f}(x) \to +\infty$。

在 $x = 4$ 附近。當 $x \to 4$ 時，$\mathrm{f}(x) \approx -\dfrac{16 \cdot 81}{16(x-4)} = -\dfrac{81}{x-4}$。所以當 $x \to 4^-$ 時 $\mathrm{f}(x) \to +\infty$，而當 $x \to 4^+$ 時 $\mathrm{f}(x) \to -\infty$。

曲線在斜漸近線的哪一側？$\mathrm{f}(x) - (x-4) = -16(2x+1)^2/(x^2(x-4))$。當 $x < 4$ 時（$x = 0$ 和 $x = -\frac{1}{2}$ 除外）這個量為正，當 $x > 4$ 時為負。所以在 $x = 4$ 的左方，曲線位於 $y = x - 4$ 之上，只在 $x = -\frac{1}{2}$ 處與它相切；在右方，曲線則位於它之下。

f 的正負號。從因式分解後的形式可見，因式 $(x+2)^2$ 和 x^2 永不為負。所以 f 的正負號與 $(x^2 - 12x - 4)/(x-4)$ 的正負號相同：

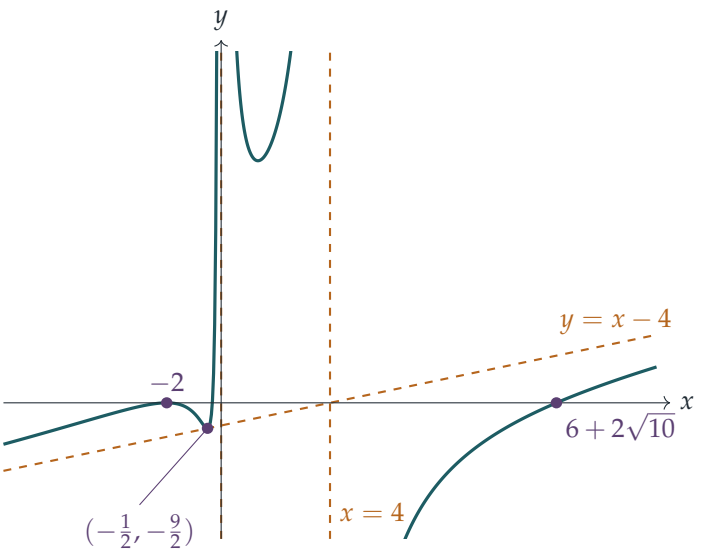
- 當 $x < 6 - 2\sqrt{10}$ 時（$\mathrm{f}(-2) = 0$ 除外），以及當 $4 < x < 6 + 2\sqrt{10}$ 時，$\mathrm{f} < 0$；
- 當 $6 - 2\sqrt{10} < x < 4$ 時（$x \neq 0$），以及當 $x > 6 + 2\sqrt{10}$ 時，$\mathrm{f} > 0$。

曲線在 $x = -2$ 的兩側都保持為負，並在該處與 x 軸相切，所以 $(-2, 0)$ 是局部極大點（local maximum）。

轉向點（*turning point*）。STEP 的草圖並不需要這些轉向點，但有了它們，草圖會更準確。求導可得

$$\mathrm{f}'(x) = 1 + \frac{16(2x+1)(2x^2+3x-8)}{x^3(x-4)^2}.$$

在 $(-2,\, 6 - 2\sqrt{10})$ 上，曲線的起點和終點高度都是 0，中間為負，所以在這區間內有一個極小點。以數值計算，這個極小點約在 $(-0.51,\, -4.50)$，剛好在切點的左方。在 $(0, 4)$ 上，曲線在兩端都趨向 $+\infty$，所以這裏也有一個極小點，約在 $(1.35,\, 42.7)$。在 $\mathrm{f}'(x) = 0$ 中消去分母，得 $(x+2)(x^4 - 10x^3 + 100x^2 - 72x - 64) = 0$。這個四次式恰好只有上述兩個實根，所以再沒有其他轉向點。特別地，f 在整個 $x > 4$ 的範圍內都是遞增的。



這幅草圖是按比例繪畫的，因此 $x = -2$ 與 $x \approx -0.32$ 之間的凹陷看起來很淺。那裏的最低點只在軸下約 4.5 處，而曲線在 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ 與漸近線相切。

驗算

- $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{9}{2} - 0 = -\frac{9}{2}$，這一點在 $y = x - 4$ 上。在 $x = -\frac{1}{2}$ 處以數值方法求導數，得 1.000。
- 展開 $(x+2)^2(x^2 - 12x - 4)$，並與 $x^2(x-4)^2 - 16(2x+1)^2$ 比較：兩者都是 $x^4 - 8x^3 - 48x^2 - 64x - 16$。
- $f(1000) - (1000 - 4) \approx -0.064 \approx -64/1000$，與 $64/x$ 這個估算所預測的一致。

常見錯誤

- 忘記了在 $x = 0$ 附近，曲線在兩側都趨向 $+\infty$，原因是有 x^2 這個因式。兩條垂直漸近線的表現並不相同。
- 證明相切時，只證明了直線與曲線相交。你還需要證明斜率相同，或者等價地，證明有重根。
- 在第 (ii) 部分把四次的分子展開，然後嘗試憑觀察找出它的根，而沒有看出那是一個平方差。

STEP 之外

一條直線與一條曲線相交而出現「二重根」，恰好就是兩者相切的時候。這就是*相交重數*（multiplicity of intersection）的概念，它是代數幾何（algebraic geometry）的基礎，並引出一些結果，例如關於兩條曲線相交多少次的貝祖定理（Bézout's theorem）。有理函數（rational function）在無窮遠處可以用它的多項式部分來近似，而餘項的大小（這裏是 $64/x$）說明了曲線趨近漸近線的速度有多快。這是對漸近展開（asymptotic expansion）的初步體驗。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 有更多這種風格的曲線描繪題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。