詳細解答

STEP III 2004，第 13 題

概率與統計 • 幾何分佈

> **STEP III 2004，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/04-s3-q13

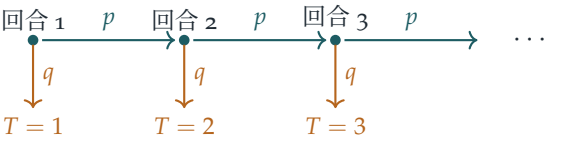
關鍵思路

暫且放下整場比賽，只跟着一位參賽者看。他出局的回合是一個幾何隨機變量（geometric random variable），而三位參賽者的出局回合互相獨立（independent）。於是每一部分都是關於三個獨立幾何變量的問題。原來大獎是否頒發，只取決於最遲的出局回合是否有人並列，所以最後一部分就是前兩部分合起來的補事件（complement）。

解答

設 $q = 1 - p$，並假設 $0 < p < 1$。對參賽者 j（$j = 1, 2, 3$），設 T_j 為他失敗的回合。他在第 k 回合失敗，當且僅當他通過了第 $1, \ldots, k-1$ 回合，然後在第 k 回合失敗，所以

$$\mathrm{P}(T_j = k) = p^{k-1}q, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$



由於每一回合的通過與否互相獨立，而各參賽者的表現亦互相獨立，所以 T_1、T_2、T_3 互相獨立。另外留意

$$\mathrm{P}(T_j \leq r - 1) = 1 - \mathrm{P}(\text{通過回合} 1, \ldots, r-1) = 1 - p^{r-1}.$$

第 (i) 部分

根據獨立性，三人同在第 k 回合出局的概率是 $(p^{k-1}q)^3$。對 k 求這個等比級數（geometric series）之和（公比（common ratio）$p^3 < 1$），得

$$\mathrm{P}(T_1 = T_2 = T_3) = \sum_{k=1}^{\infty} q^3 p^{3(k-1)} = \frac{q^3}{1-p^3} = \frac{(1-p)^2}{1+p+p^2}.$$

第 (ii) 部分

較早出局的參賽者有 3 種選法。選定之後，其餘兩人同在第 r 回合失敗的概率是 $(p^{r-1}q)^2$，而較早出局的那一位在第 r 回合之前某一回合失敗的概率是 $1-p^{r-1}$。不同選法所對應的事件互斥（disjoint），所以

$$\mathrm{P}(\text{兩人在回合}r\text{, 第三人較早}) = 3p^{2r-2}q^2\left(1-p^{r-1}\right).$$

第 (iii) 部分

想一想 用 T_1, T_2, T_3 來表達，大獎究竟在甚麼情況下才會頒發？

假設 T_j 之中的最大值只由一位參賽者取得，例如 $T_3 > T_1, T_2$，並設 $m = \max(T_1, T_2)$。在第 m 回合，參賽者 3 仍然在場，並且通過該回合。當時仍在場的其他參賽者都有 $T_j = m$，所以都在該回合失敗。因此參賽者 3 在第 m 回合贏得大獎。

反過來，假設最大值有人並列，例如 $T_2 = T_3 = M \geq T_1$。在第 M 回合之前，參賽者 2 和 3 都仍然在場，而且每一回合都通過，所以沒有任何一個回合只剩一人過關。到了第 M 回合，餘下的人全部失敗，所以根本無人過關。因此大獎不會頒發。

由此可見，大獎不頒發，當且僅當最遲的兩個出局回合相等：要麼三者全部相等（第 (i) 部分），要麼其中兩者在某個第 r 回合相等，而第三者較早。第二種情況需要 $r \geq 2$，而它正是第 (ii) 部分的事件。把第 (ii) 部分的結果對 $r \geq 2$ 求和，並設 $s = r-1$，

$$\begin{aligned}\sum_{r=2}^{\infty} 3q^2p^{2r-2}\left(1-p^{r-1}\right) &= 3q^2\sum_{s=1}^{\infty}\left(p^{2s}-p^{3s}\right) = 3q^2\left(\frac{p^2}{1-p^2}-\frac{p^3}{1-p^3}\right)\\ &= 3q^2\,\frac{p^2(1-p^3)-p^3(1-p^2)}{(1-p^2)(1-p^3)} = 3q^2\,\frac{p^2(1-p)}{(1-p^2)(1-p^3)}\\ &= \frac{3p^2q^2}{(1+p)(1-p^3)}.\end{aligned}$$

加上第 (i) 部分的結果，並利用 $1-p^3 = q(1+p+p^2)$，

$$\mathrm{P}(\text{沒有大獎}) = \frac{q^3(1+p)+3p^2q^2}{(1+p)(1-p^3)} = \frac{q^2(1+2p^2)}{(1+p)(1-p^3)} = \frac{(1-p)(1+2p^2)}{(1+p)(1+p+p^2)}.$$

由於 $(1+p)(1+p+p^2) = 1+2p+2p^2+p^3$ 及 $(1-p)(1+2p^2) = 1-p+2p^2-2p^3$，兩者之差是 $3p+3p^3$。因此

$$\mathrm{P}(\text{頒發大獎}) = \frac{3p(1+p^2)}{(1+p)(1+p+p^2)}.$$

驗算

- 當 $p \to 0$ 時，人人都在第 1 回合失敗，而 (iii) 的答案趨向 0。當 $p \to 1$ 時，並列的機會變得很小，而答案趨向 $\frac{3\cdot 2}{2\cdot 3} = 1$。
- 直接計算：當其中一個 T_j 大於另外兩個時，大獎便會頒發，所以其概率是 $3\sum_k p^{k-1}q\,(1-p^{k-1})^2$。取 $p = \frac{1}{2}$ 作精確求和，得 $\frac{5}{7} \approx 0.714$，與 $\frac{3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{4}} = \frac{5}{7}$ 吻合。
- 直接模擬（simulation）比賽本身（取 $p = 0.6$，進行 2×10^5 次），結果有 77.9% 的次數頒發了大獎，而公式給出的是 0.7806。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分忘記了因數 3，即選擇哪一位參賽者較早出局的選法數目。
- 以為最後兩人必須在不同回合出局，大獎才會頒發。如果有兩人同在第 m 回合出局，而第三人通過了該回合，他仍然獲獎。只有在最高處出現並列，大獎才不會頒發。

STEP 之外

這道題目所問的，是獨立幾何隨機變量的最大值，以及這個最大值是否唯一。對 n 位參賽者而言，當 $n \to \infty$ 時，最高處出現並列的概率並不會穩定下來趨向一個極限。它會隨 $\log n$ 作極輕微的振盪，這是領袖選舉（leader election）等演算法分析中一個著名的意外現象。這裏用到的工具，即對一個變量取條件（conditioning）以及等比級數求和，在 Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction* 中有詳細闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。