詳細解答

STEP III 2004，第 11 題

力學 • 二體排斥

STEP III 2004，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/04-s3-q11

本題在 *Beyond STEP* 第 10.6 節二體化爲一體中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch10/two-body.html

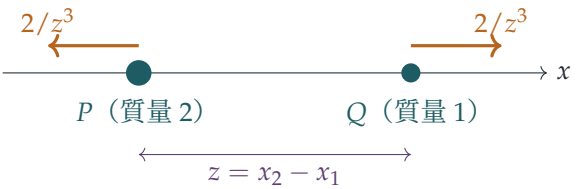
關鍵思路

兩個質點互相推開，會得出兩條運動方程（equation of motion），而只要把它們巧妙地組合兩次，問題便迎刃而解。*差* $x_2 - x_1$ 給出一條只涉及間距 z 的方程，利用 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}z$ 這個技巧便可積分一次（這其實就是能量守恆）。*加權和* $2x_1 + x_2$ 是質心（centre of mass）位置的三倍，而由於這些力都是內力，它完全不受任何淨力作用。

解答

z 的方程

把 P 和 Q 視為直線上的質點（particle），x 沿由 P 指向 Q 的方向遞增（因為 $x_2 > x_1$）。斥力（repulsion）把 P 推向負方向，把 Q 推向正方向，兩者的大小均為 $2/z^3$。



對每個質點應用牛頓第二定律（Newton's second law），得

$$2\ddot{x}_1 = -\frac{2}{z^3}, \qquad \ddot{x}_2 = \frac{2}{z^3}.$$

所以 $\ddot{x}_1 = -1/z^3$，兩式相減，得

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{z^3},$$

正是所求。

求解 z

先看初始條件（initial conditions）。在 $t = 0$ 時，$z = 1$。P 朝着 Q 運動，即沿正方向運動，所以 $\dot{x}_1 = 1$，而 $\dot{x}_2 = 0$。因此在 $t = 0$ 時，$v = \dot{z} = 0 - 1 = -1$：兩者的間距正在縮小。

利用 $\ddot{z} = v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}z$，方程變成

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = \frac{3}{z^3} \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{1}{2}v^2 = -\frac{3}{2z^2} + C.$$

當 $z = 1$ 時，$v^2 = 1$，所以 $\frac{1}{2} = -\frac{3}{2} + C$，即 $C = 2$。因此

$$v^2 = 4 - \frac{3}{z^2}, \qquad \text{或} \qquad z^2\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 4z^2 - 3.$$

左邊是 $\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(z^2)/\mathrm{d}t\right)^2$，這提示我們設 $u = \sqrt{4z^2 - 3} \geq 0$。於是 $u^2 = 4z^2 - 3$，所以 $u\,\dot{u} = 4z\dot{z}$，而上面的方程表示 $(z\dot{z})^2 = u^2$，即 $z\dot{z} = \pm u$。因此

$$\dot{u} = \frac{4z\dot{z}}{u} = \pm 4.$$

起初 $u = 1$ 而 $z\dot{z} = -1 < 0$，所以取負號：$u = 1 - 4t$。

想一想 當 u 降至 0 時會發生甚麼事？$\dot{z}$ 的符號會一直保持為負嗎？

不會。在 $t = \frac{1}{4}$ 時 $u = 0$，所以 $z = \sqrt{3}/2$ 而 $v = 0$：兩個質點在這一刻最為接近。此時 $\ddot{z} = 3/z^3 > 0$，所以 z 開始增加，$\dot{z}$ 變為正數，改為取正號，於是當 $t \geq \frac{1}{4}$ 時 $u = 4t - 1$（在 $t = \frac{1}{4}$ 處連續）。在兩種情況下均有 $u^2 = (4t - 1)^2$，所以對所有 $t \geq 0$，

$$4z^2 - 3 = 16t^2 - 8t + 1 \quad \Longrightarrow \quad z^2 = 4t^2 - 2t + 1,$$

又因為 $z > 0$，

$$z = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}.$$

這就是所求的結果。（注意 $4t^2 - 2t + 1 = 4(t - \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{4} > 0$，所以平方根恆有定義。）

求 x_1 和 x_2

由兩條運動方程，

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(2x_1 + x_2) = 2\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\frac{2}{z^3} + \frac{2}{z^3} = 0.$$

這就是動量守恆(conservation of momentum)：兩個力大小相等、方向相反。所以 $2x_1 + x_2$ 是 t 的線性函數。在 $t = 0$ 時它等於 $2 \cdot 0 + 1 = 1$，而它的變化率是 $2\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 2 \cdot 1 + 0 = 2$。因此

$$2x_1 + x_2 = 2t + 1, \qquad x_2 - x_1 = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}.$$

第一式減去第二式得 $3x_1$，第一式加上第二式的兩倍得 $3x_2$：

$$x_1 = \frac{2t + 1 - \sqrt{4t^2 - 2t + 1}}{3}, \qquad x_2 = \frac{2t + 1 + 2\sqrt{4t^2 - 2t + 1}}{3}.$$

驗算

- 在 $t = 0$ 時，以上兩式給出 $x_1 = 0$ 和 $x_2 = 1$。求導後，$\dot{x}_1(0) = \frac{1}{3}\big(2 - \frac{1}{2} \cdot (-2)\big) = 1$ 及 $\dot{x}_2(0) = \frac{1}{3}(2 - 2) = 0$，符合要求。
- 求 z 的一條捷徑：設 $w = z^2$，則 $\ddot{w} = 2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = 2\big(4 - 3/z^2\big) + 6/z^2 = 8$，所以由 $w(0) = 1$ 和 $\dot{w}(0) = 2z\dot{z} = -2$ 可得 $w = 4t^2 - 2t + 1$。這樣便完全不必為符號操心。
- 當 $t \to \infty$ 時，$z \approx 2t - \frac{1}{2}$，所以 $x_1 \to \frac{1}{2}$ 而 $\dot{x}_2 \to 2$：P 最終靜止，而 Q 帶走全部動量（$1 \times 2 = 2 \times 1$）和全部能量。勢能（potential energy）是 $1/z^2$，所以開始時的能量是 $1 + 1 = 2$，最終的能量是 $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2 = 2$。
- 以數值方法逐步計算原來的方程（龍格—庫塔法（Runge–Kutta），步長 10^{-4}）直至 $t = 5$，所得結果與 x_1、x_2 和 z 的公式相差不超過 10^{-11}，最接近時的間距為 $z = 0.8660\ldots = \sqrt{3}/2$。

常見錯誤

- 取 $\dot{z}(0) = +1$。P 正朝着 Q 運動，所以間距正在縮小。
- 寫出 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t = -\sqrt{4 - 3/z^2}$ 並以為它在所有時刻都成立，忽略了 $t = \frac{1}{4}$ 處的轉向點(turning point)。
- 在 P 的方程中漏掉質量 2，結果得出 $\ddot{z} = 4/z^3$。

STEP 之外

這是二體問題（two-body problem）的縮影：質心作勻速運動，而相對坐標的表現就像一個約化質量（reduced mass）為 $m_1 m_2/(m_1+m_2) = \frac{2}{3}$ 的單一質點受着同一個力，因為 $\frac{2}{3}\ddot{z} = 2/z^3$。同樣的分拆方法可把行星運動化為單一軌道的問題。平方反比以外，立方反比力（inverse-cube force）也很特別：z^2 原來恰好是 t 的二次函數，這是 $1/z^2$ 勢所隱藏的一種對稱性，屬於共形力學（conformal mechanics）的研究課題。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）對約化質量和二體運動有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。