詳細解答

STEP III 2004，第 10 題

力學 • 彈性繩與簡諧運動

STEP III 2004，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

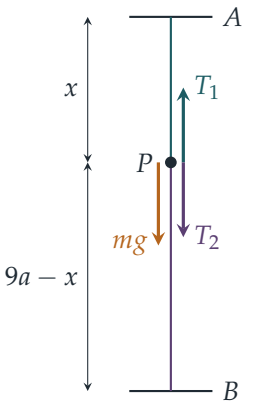
step.maths.org/questions/04-s3-q10

關鍵思路

每條弦線只有在拉緊時才遵從虎克定律（Hooke's law），所以要按哪些弦線處於拉緊狀態，把運動分成幾個階段。在每個階段中，加速度都是 $7a - x$ 的常數倍，因此質點以 $x = 7a$ 為中心作簡諧運動（simple harmonic motion），只是各階段的 ω 不同。我們先求出第一階段結束時的時間和速率，再以此作為第二階段的起始條件。

解答

我們把 P 視為質點（particle），並把弦線視為輕弦：伸長時遵從虎克定律，鬆弛時不施力。取 $x = AP$，由 A 向下量度，於是 $PB = 9a - x$，並以向下為正方向。



運動方程

當 $x > 6a$ 時，弦線 AP 的伸長量為 $x - 6a$，所以它把 P 向上拉的張力（tension）為

$$T_1 = \frac{6mg(x-6a)}{6a} = \frac{mg(x-6a)}{a}.$$

當 $x < 7a$ 時，弦線 BP 的伸長量為 $(9a - x) - 2a = 7a - x$，所以它把 P 向下拉向 B 的張力為

$$T_2 = \frac{6mg(7a-x)}{2a} = \frac{3mg(7a-x)}{a},$$

而當 $x \geq 7a$ 時，BP 鬆弛，$T_2 = 0$。

當 $6a < x < 7a$ 時，兩條弦線都拉緊，沿向下方向應用牛頓第二定律（Newton's second law），得

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg - \frac{mg(x-6a)}{a} + \frac{3mg(7a-x)}{a} \\ &= \frac{mg}{a}(a - x + 6a + 21a - 3x) = \frac{mg}{a}(28a - 4x), \end{aligned}$$

所以 $\ddot{x} = \dfrac{4g}{a}(7a - x)$，正是所需結果。

當 $7a < x < 9a$ 時，只有 AP 拉緊，所以

$$m\ddot{x} = mg - \frac{mg(x-6a)}{a} = \frac{mg}{a}(7a - x),$$

由此得 $\ddot{x} = \dfrac{g}{a}(7a - x)$，正是所需結果。

到達 B 所需的時間

第一階段：$6a \leq x \leq 7a$。設 $y = x - 7a$，則 $\ddot{y} = -\omega_1^2 y$，其中 $\omega_1^2 = 4g/a$，這是以 $x = 7a$ 為中心的簡諧運動。質點由 $y = -a$ 從靜止開始運動，故

$$x = 7a - a\cos\omega_1 t, \qquad \dot{x} = a\omega_1 \sin\omega_1 t.$$

質點在 $x = 6a$ 從靜止開始，向下加速（因為該處 $\ddot{x} > 0$），所以 x 由 $6a$ 起遞增，並一直處於這個階段，直至 $x = 7a$。這在 $\cos\omega_1 t = 0$ 時發生，首次出現於 $\omega_1 t = \pi/2$，即經過時間

$$t_1 = \frac{\pi}{2\omega_1} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{a}{g}},$$

此時速率為 $a\omega_1 = 2\sqrt{ag}$，方向向下。

> ? **想一想** 方程在 $x = 7a$ 處改變了。我們該怎樣繼續？

位置和速度在 $x = 7a$ 處都是連續的，所以第一階段的終結狀態就是第二階段的初始條件（starting conditions）。我們在該處重新計時。

第二階段：$7a \le x \le 9a$。這時 $\ddot{y} = -\omega_2^2 y$，其中 $\omega_2^2 = g/a$，質點由中心 $y = 0$ 以速率 $2\sqrt{ag}$ 出發。因此，設 τ 為自 $x = 7a$ 起計的時間，則

$$x = 7a + \frac{2\sqrt{ag}}{\omega_2} \sin \omega_2 \tau = 7a + 2a \sin \omega_2 \tau.$$

振幅（amplitude）剛好是 $2a$，所以當 $\sin \omega_2 \tau = 1$ 時，質點到達 $x = 9a$，亦即 B 點，首次出現於 $\omega_2 \tau = \pi/2$。在該刻 $\dot{x} = 2\sqrt{ag} \cos \omega_2 \tau = 0$，所以質點到達 B 時速率為零。這個階段需時

$$t_2 = \frac{\pi}{2\omega_2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

因此，質點到達 B 所需的時間為

$$t_1 + t_2 = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{a}{g}} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} = \frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

驗算

能量的計算可以確認 P 剛好到達 B 並在該處靜止。比較起點（BP 伸長了 a）和到達 B 的一刻（AP 伸長了 $3a$）。彈性勢能（elastic energy）由 $\frac{6mg\,a^2}{2\cdot 2a} = \frac{3}{2}mga$ 變為 $\frac{6mg\,(3a)^2}{2\cdot 6a} = \frac{9}{2}mga$。增加了 $3mga$，剛好等於下降 $3a$ 所失去的重力勢能（gravitational energy），所以在 B 處的動能（kinetic energy）為零。數值上，取 $a = 0.7$ 和 $g = 9.8$，由 $x = 6a$ 從靜止開始，對完整的運動方程逐步作數值計算，得出在 $t \approx 0.2099$ 時 $x = 7a$，在 $t \approx 0.6297$ 時到達最低點 $x = 9a$，而 $\frac{3\pi}{4}\sqrt{a/g} = 0.6297$。

常見錯誤

- 在 $x > 7a$ 時仍使用 T_2：弦線不能推物，所以一旦 BP 短於 $2a$，它便不施力。
- 整個運動都使用 ω_1，或者忘記以第一段簡諧運動所留下的速率 $2\sqrt{ag}$ 重新開始第二段簡諧運動。
- 沒有檢查振幅 $2a$ 是否真的能把 P 帶到 B，便把第二階段說成是四分之一個週期（period）。

STEP 之外

這是一個分段線性振子（piecewise-linear oscillator）：回復力（restoring force）是線性的，但勁度（stiffness）在 $x = 7a$ 處改變。兩個部分各有自己的相平面（phase plane）橢圓，而軌跡則由兩個不同橢圓的弧組成，在弦線變鬆之處相接。由彈跳的球到碰撞振子（impact oscillator），這類系統是非線性動力學（nonlinear dynamics）的標準入門例子。

Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）深入討論了振動和能量方法。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。