詳細解答

STEP III 2004，第 1 題

純數學 • 雙曲函數積分

> **STEP III 2004，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/04-s3-q1

關鍵思路

兩個被積函數（integrand）都是一個雙曲函數（hyperbolic function）乘以由另一個雙曲函數構成的式子，而 $\sinh x\,\mathrm{d}x$ 和 $\cosh x\,\mathrm{d}x$ 正好分別是 $\cosh x$ 和 $\sinh x$ 的微分（differential）。因此，代換（substitution）$c = \cosh x$ 和 $s = \sinh x$ 可把它們化為有理函數的積分：一個要用部分分式（partial fractions），另一個則得出反正切（arctangent）。至於題目中「由此」（hence）的一步，關鍵在於留意到兩個分母其實是同一個函數，因為 $2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x$。

解答

第一個積分

設 $c = \cosh x$，則 $\mathrm{d}c = \sinh x\,\mathrm{d}x$；積分限 $x = 0$ 和 $x = a$ 變為 $c = 1$ 和 $c = \cosh a$。於是

$$\int_0^a \frac{\sinh x}{2\cosh^2 x - 1}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\cosh a} \frac{\mathrm{d}c}{2c^2 - 1}.$$

分母可因式分解為 $(\sqrt{2}\,c - 1)(\sqrt{2}\,c + 1)$，而

$$\frac{1}{(\sqrt{2}\,c - 1)(\sqrt{2}\,c + 1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,c - 1} - \frac{1}{\sqrt{2}\,c + 1}\right),$$

把右邊通分合併即可驗證：分子是 $\frac{1}{2}((\sqrt{2}c + 1) - (\sqrt{2}c - 1)) = 1$。每一項積分後都得出一個對數，並因鏈式法則（chain rule）而多出一個因子 $1/\sqrt{2}$。當 $c \geq 1$ 時，$\sqrt{2}c \pm 1$

兩者皆為正數，所以無須加上絕對值符號：

$$\begin{aligned}\int_1^{\cosh a} \frac{\mathrm{d}c}{2c^2-1} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[\ln(\sqrt{2}\,c-1)-\ln(\sqrt{2}\,c+1)\Big]_1^{\cosh a}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}\cosh a-1}{\sqrt{2}\cosh a+1}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right).\end{aligned}$$

由於 $-\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$，這正是所求的結果。

第二個積分

現在設 $s=\sinh x$，則 $\mathrm{d}s=\cosh x\,\mathrm{d}x$，積分限為 $s=0$ 和 $s=\sinh a$：

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{\cosh x}{1+2\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\sinh a}\frac{\mathrm{d}s}{1+(\sqrt{2}\,s)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\arctan(\sqrt{2}\,s)\Big]_0^{\sinh a}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\sinh a).\end{aligned}$$

無窮積分

想一想 兩個被積函數的分母看來並不相同，我們怎樣才可以把它們相減？

利用 $\cosh^2 x=1+\sinh^2 x$，

$$2\cosh^2 x-1=2+2\sinh^2 x-1=1+2\sinh^2 x,$$

所以兩個分母完全相同，而

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{\cosh x-\sinh x}{1+2\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\sinh a)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}\cosh a-1}{\sqrt{2}\cosh a+1}\right)\\ &\quad-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right).\end{aligned}$$

現在令 $a\to\infty$。由於 $\sinh a\to\infty$，故 $\arctan(\sqrt{2}\sinh a)\to\frac{\pi}{2}$。由於 $\cosh a\to\infty$，

$$\frac{\sqrt{2}\cosh a-1}{\sqrt{2}\cosh a+1}=\frac{1-1/(\sqrt{2}\cosh a)}{1+1/(\sqrt{2}\cosh a)}\to 1,$$

而 ln 在 1 處連續（continuous），所以它的對數趨向 0。三項都有有限的極限，因此這個無窮積分收斂（converge），並且

$$\int_0^\infty \frac{\cosh x-\sinh x}{1+2\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right),$$

正如所求。

最後一個積分

想一想 以 e^x 表示的話，$\cosh x - \sinh x$ 和 $1 + 2\sinh^2 x$ 會是甚麼樣子？

設 $u = e^x$，則 $\cosh x - \sinh x = e^{-x} = 1/u$；再利用二倍角公式（double-angle formula），

$$1 + 2\sinh^2 x = \cosh 2x = \frac{u^2 + u^{-2}}{2} = \frac{u^4 + 1}{2u^2}.$$

此外 $\mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x$，所以 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/u$，而積分限 $x = 0$、$x \to \infty$ 變為 $u = 1$、$u \to \infty$。因此

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\cosh x - \sinh x}{1 + 2\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^\infty \frac{1}{u} \cdot \frac{2u^2}{1 + u^4} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{u} \\ &= 2\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^4}.\end{aligned}$$

把上一個結果減半，

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^4} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}\right).$$

這個式子還可以化簡：$\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = (\sqrt{2}+1)^2$，所以該對數等於 $2\ln(1+\sqrt{2})$，而

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^4} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} \approx 0.2437.$$

驗算

- 當 $a = 0$ 時，第一條公式給出 $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = 0$，在空區間上的積分理應如此。
- 最後的答案是正數，並且小於 $\int_1^\infty u^{-4}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}$；由於 $1 + u^4 > u^4$，這是合理的。
- 對 $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}$ 使用辛普森法則(Simpson's rule)(經代換 $u = 1/t$ 後，它變為 $\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$)，得出 0.243748，與公式吻合至小數點後十二位。以 x 表示的無窮積分，數值驗算結果為 0.487495，正是它的兩倍。

常見錯誤

- 對 $\frac{1}{\sqrt{2}c \pm 1}$ 或 $\frac{1}{1+2s^2}$ 積分時，漏掉因子 $\frac{1}{\sqrt{2}}$。
- 代換時沒有更改積分限，或者答案仍以 c 或 s 表示。

- 在最後一部分，忘記 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/u$，結果得出 $2u/(1+u^4)$ 和一個發散（divergent）的積分。

STEP 之外

最後的結果是一個經典積分的一部分：$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$，而代換 $u \mapsto 1/u$ 顯示，在 $[0,1]$ 和 $[1,\infty)$ 上的兩部分分別是 $\int_0^1 \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ 和 $\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$，它們的和與差都可以用初等方法求出。在大學一年級的課程中，你還會遇到一條更巧妙的途徑，就是圍道積分（contour integration）和留數（residue），它可以一舉求出 $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）是學習這個想法的絕佳讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。