詳細解答

STEP II 2004，第 9 題

力學 • 重心

STEP II 2004，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/04-s2-q9

關鍵思路

半球以曲面着地時，與平面接觸的是球面上的一點，而球面的法線必定通過球心。因此反作用力沿着通過底面圓心 O 的鉛垂線作用；平衡時，無論放在那裏的是甚麼物體，其重心（centre of gravity）都必定在同一條鉛垂線上。於是題目的每一部分都只是「求出重心，然後傾斜物體，直至重心在 O 的正下方」。採用固定在物體上的坐標，整個計算就輕鬆得多。

解答

模型與平衡條件

把半球視為剛體（rigid body），它與水平面只在一點 C 接觸；把質點（particle）視為固定在邊緣上的點質量。作用力只有各個重量和 C 處的接觸力。由於 C 在球面上，C 處的法線通過 O；又因為平面是水平的，這條法線是鉛垂的。所以 C 在 O 的正下方，而且無論物體怎樣滾動，O 的高度始終是 r。

平衡（equilibrium）時，接觸力必須與總重量互相抵銷，所以它是鉛垂的（沒有摩擦力），並且與重量沿同一直線作用。因此：

平衡時，系統的重心在通過 O 的鉛垂線上。

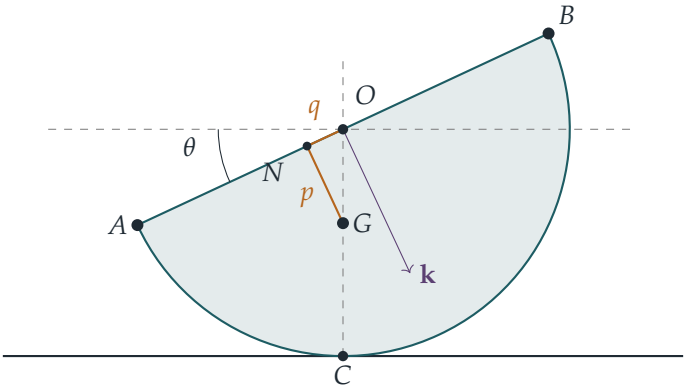
重心在 O 的下方，因為物體位於底面的曲面那一側。

物體坐標與初始位置

在物體上固定兩個互相垂直的單位向量（unit vector）：$\mathbf{k}$ 沿對稱軸，由 O 指向曲面；$\mathbf{e}$ 在底面所在的平面內。由於 G 與底面的距離是 p，與 O 的距離是 $\sqrt{p^2+q^2}$，它在底面上的垂足 N 與 O 的距離是 q。選取 $\mathbf{e}$ 由 O 指向 N，便得

$$\overrightarrow{OG} = p\,\mathbf{k} + q\,\mathbf{e}.$$

底面垂直於 $\mathbf{k}$，所以底面與水平面的夾角等於 $\mathbf{k}$ 與鉛垂線的夾角。在初始位置，$\overrightarrow{OG}$ 鉛垂向下，所以這個角 θ 滿足 $\tan\theta = q/p$。



邊緣上哪一點最低？邊緣上的一點相對於 O 的位置是 $r(\cos\phi\,\mathbf{e} + \sin\phi\,\mathbf{f})$，其中 $\mathbf{f}$ 是第三個單位向量，與前兩者都垂直。這一點在 O 以下的深度，就是它沿向下的單位向量 $(p\mathbf{k}+q\mathbf{e})/\sqrt{p^2+q^2}$ 的分量，即

$$\frac{rq\cos\phi}{\sqrt{p^2+q^2}},$$

當 $\phi = 0$ 時最大（這裏取 $q > 0$；若 $q = 0$，底面是水平的，沒有唯一的最低點）。所以

$$\overrightarrow{OA} = r\,\mathbf{e}, \qquad \overrightarrow{OB} = -r\,\mathbf{e}.$$

用文字說明：A 與 G 在對稱軸的同一側，並且在通過 O 和 G 的鉛垂平面內，而整個問題始終留在這個平面內。

質點在 A

半球連同質點的重心 G_A 由下式給出：

$$(M+m)\,\overrightarrow{OG_A} = M(p\,\mathbf{k} + q\,\mathbf{e}) + mr\,\mathbf{e} = Mp\,\mathbf{k} + (Mq+mr)\,\mathbf{e}.$$

在新的平衡位置，$\overrightarrow{OG_A}$ 是鉛垂的，所以與求 θ 時完全一樣，$\mathbf{k}$ 與鉛垂線的夾角（亦即底面與水平面的夾角）就是 $\overrightarrow{OG_A}$ 與 $\mathbf{k}$ 的夾角：

$$\tan\alpha = \frac{Mq+mr}{Mp}, \qquad \text{所以} \qquad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{Mq+mr}{Mp}\right).$$

正如所料，A 處多出的重量把 A 拉得更低，於是 $\alpha > \theta$。

> **想一想** 為甚麼底面的傾角就是 $\overrightarrow{OG_A}$ 與對稱軸的夾角？

底面垂直於對稱軸 $\mathbf{k}$，而水平面垂直於鉛垂線。把一對直線各自旋轉一個直角，並不改變兩者之間的夾角，所以底面與水平面的夾角等於 $\mathbf{k}$ 與鉛垂線的夾角。平衡時，通過 O 的鉛垂線就是直線 OG_A，它沿 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{e}$ 的分量分別是 Mp 和 $Mq + mr$（除以 $M + m$ 之後）。它與 $\mathbf{k}$ 所成角的正切就是這兩個分量之比。

質點在 B

現在質點位於 $-r\,\mathbf{e}$，所以新的重心 G_B 滿足

$$(M+m)\,\overrightarrow{OG_B} = Mp\,\mathbf{k} + (Mq - mr)\,\mathbf{e}, \qquad \text{由此得} \qquad \tan\beta = \frac{Mq - mr}{Mp}.$$

由於 m 很小，我們有 $mr < Mq$，所以 $\overrightarrow{OG_B}$ 仍然與先前一樣在對稱軸的同一側，底面向同一方向傾斜，傾角是較小的 β。

兩個位置之間的夾角

由複角公式（compound-angle formula），

$$\begin{aligned}\tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\dfrac{2mr}{Mp}}{1 + \dfrac{(Mq+mr)(Mq-mr)}{M^2p^2}} \\ &= \frac{2mMrp}{M^2p^2 + M^2q^2 - m^2r^2} = \frac{2mMrp}{M^2\,(p^2+q^2) - m^2r^2},\end{aligned}$$

其中第三步把分子和分母同乘以 M^2p^2。這就是所要求的結果。

驗算

- 若 $q = 0$（例如均勻半球），兩個位置互為鏡像：$\tan\alpha = mr/(Mp)$ 而 $\beta = -\alpha$。公式給出 $\tan 2\alpha = 2t/(1-t^2)$，其中 $t = mr/(Mp)$，正是二倍角公式，與預期相符。
- 若 $m \to 0$，則 α 和 β 都趨向 θ，而右邊趨向 0。
- 取 $M = 1$、$m = 0.1$、$r = 1$、$p = \frac{3}{8}$、$q = \frac{1}{8}$，得 $\tan\alpha = 0.6$ 和 $\tan\beta = \frac{1}{15}$，所以 $\alpha \approx 30.96°$，$\beta \approx 3.81°$。結果的兩邊都等於 $\frac{20}{39} \approx 0.5128$。我們亦以數值方法求出平衡角：對 2000 組隨機數值，把重心的高度減至最小，所得結果與 $\tan\alpha$ 和 $\tan\beta$ 的公式相符，誤差在 10^{-13} 以內。

常見錯誤

- 把 G 放在原來位置的接觸點的正下方，而不是 O 的正下方。接觸點會隨物體滾動而移動；O 才是始終在接觸點正上方的那一點。
- 把 A 取在對稱軸的錯誤一側。邊緣的最低點與 G 在同一側，這正是質點在 A 時傾角增大的原因。
- 當 $mr > Mq$ 時仍把 β 當作正數。這時底面向另一方向傾斜，公式只在把 β 算作負數時才成立；「m 很小」這個條件正是要排除這種情況。

STEP 之外

這裏所用的原理是：剛體在重力和單一接觸力作用下平衡時，其質心（centre of mass）在該力的作用線上。等價的說法是，質心處於高度的駐值（stationary）位置；而考察物體滾動時這個高度的變化，還可以判定平衡是否穩定。這就是判定穩定性的能量法（energy method）的起點，大學一年級力學會把這套方法發展下去，用來處理搖擺和滾動的物體。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）正是以這種觀點講述質心和剛體平衡。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。