詳細解答

STEP II 2004，第 8 題

純數學 • 微分方程的比較

STEP II 2004，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/04-s2-q8

關鍵思路

當 $0 \leq x < 1$ 時，右邊為正數，所以 x 隨 t 遞增，我們可以把方程倒轉過來看：t 變成 x 的函數，即由 0 爬升到高度 x 所需的時間。在每個高度上斜率都較大，即每個高度都較早到達，所以題目給出的右邊各式之間的不等式（inequality）立即定出三條曲線的次序，一條在另一條之上。至於爬升到 $x = 1$ 所需的時間是有限還是無限，就變成一個瑕積分（improper integral）是否收斂（converge）的問題。

解答

以下一律以 $x_n(t)$ 表示指數為 n 時的解。在 $t = 0$ 時，$x = 0$，而對每個 n 斜率都是 $(1-0)^{1/n} = 1$，所以所有曲線都沿直線 $x = t$ 離開原點。當 $0 \leq x < 1$ 時，斜率嚴格為正，所以 x 遞增，而

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{(1-x^n)^{1/n}}, \qquad \text{所以} \qquad t_n(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\xi^n)^{1/n}}$$

就是解到達高度 x 的時刻，其中 $0 \leq x < 1$。

第 (i) 部分

取 $n = 1$，方程為 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 - x$。分離變數（separating variables）（這是可行的，因為沿着解有 $1 - x > 0$），

$$t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{1-\xi} = -\ln(1-x), \qquad \text{所以} \qquad x = 1 - \mathrm{e}^{-t}.$$

圖像由原點出發，斜率為 1，一直遞增並且向下凹（concave）（其斜率 e^{-t} 遞減），當 $t \to \infty$ 時趨近漸近線（asymptote）$x = 1$ 但永遠不會到達：當 $x \to 1$ 時，$t_1(x) =$

$-\ln(1-x) \to \infty$。下圖中最低的一條曲線就是它。

第 (ii) 部分

不等式。對 $0 < x < 1$，$1-x$ 和 $(1-x^2)^{1/2}$ 都是正數，所以該不等式等價於兩邊平方後所得的不等式：

$$(1-x)^2 < 1-x^2 \iff 1-2x+x^2 < 1-x^2 \iff 2x^2 < 2x \iff x < 1,$$

其中最後一步是除以 $2x > 0$。由於 $x < 1$ 成立，所以 $1-x < (1-x^2)^{1/2}$ 也成立。

草圖。在 $(0,1)$ 內的每個高度 x，$n = 2$ 的曲線都比 $n = 1$ 的曲線陡。因此，對 $0 < x < 1$，

$$t_2(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\xi^2)^{1/2}} < \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{1-\xi} = t_1(x),$$

因為左邊的被積函數（integrand）在 $(0,x]$ 上嚴格較小。所以 $n = 2$ 的解嚴格較早到達每一個高度；又因為兩個解都是遞增的，所以在每個時刻 $t > 0$（只要 $x_2 < 1$），$n = 2$ 的曲線都嚴格位於 $n = 1$ 的曲線之上。兩者都以斜率 1 離開原點，所以在原點附近它們非常接近，然後隨着 t 增大而分開。

> **想一想** 兩條曲線在原點的斜率相同。為甚麼 $n = 1$ 的曲線不能在稍後悄悄升到上面？

要升到上面，它必須在某個高度 x 追上 $n = 2$ 的曲線，即在同一時刻到達 x。但對每個 $x \in (0,1)$ 都有 $t_2(x) < t_1(x)$：爬得較慢的那個總是嚴格地遲到。（等價的說法是：凡兩條曲線處於同一高度之處，$n = 2$ 的那條都較陡，所以它永遠不會被超越。）

求解。設 $x = \sin y$，其中 $0 \le y < \frac{1}{2}\pi$，且在 $t = 0$ 時 $y = 0$。於是 $\cos y > 0$，所以 $(1-x^2)^{1/2} = (\cos^2 y)^{1/2} = \cos y$，方程變成

$$\cos y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos y \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1 \quad \Longrightarrow \quad y = t,$$

這裏用到在 $t = 0$ 時 $y = 0$。所以解為

$$x = \sin t \qquad \text{其中} 0 \le t < \tfrac{1}{2}\pi.$$

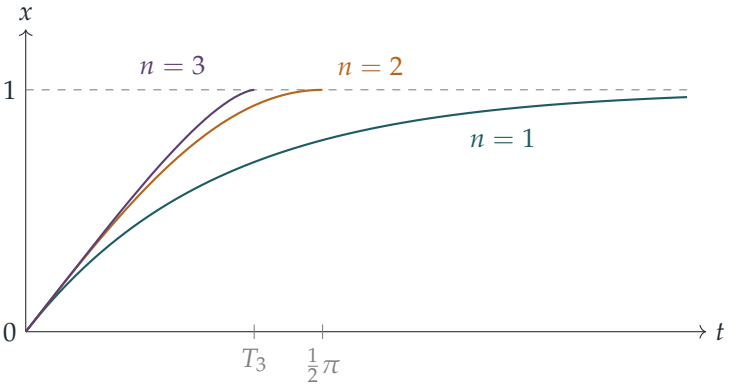
這與 $t_2(x) = \arcsin x$ 吻合。與 $n = 1$ 的情況不同，這個解在有限時間內到達 $x = 1$，時刻為 $t = \frac{1}{2}\pi$，而且到達時斜率為 $\cos\frac{1}{2}\pi = 0$，與直線 $x = 1$ 相切。

第 (iii) 部分

與之前完全一樣，在 $(0,1)$ 上運用題目給出的不等式 $(1-x^2)^{1/2} < (1-x^3)^{1/3}$，可知 $n = 3$ 的曲線在每個高度都比 $n = 2$ 的曲線陡，所以

$$t_3(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\xi^3)^{1/3}} < \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\xi^2)^{1/2}} = \arcsin x \qquad (0 < x < 1).$$

所以 $n = 3$ 的曲線和其他曲線一樣以斜率 1 離開原點，並且在 $t > 0$ 時嚴格位於 $x = \sin t$ 之上。它的斜率 $(1 - x^3)^{1/3}$ 在 $x \to 1$ 時降至 0，所以它與直線 $x = 1$ 相遇時同樣會變得平坦。



在 $t = \frac{1}{2}\pi$ 之前到達 $x = 1$。草圖顯示 $n = 3$ 的曲線位於 $\sin t$ 之上，而後者本身在 $\frac{1}{2}\pi$ 到達 1；所以 $n = 3$ 的曲線必定不遲於該時刻到達 1。要看出它是嚴格較早到達，可在積分的比較中令 $x \to 1$。到達 $x = 1$ 所需的時間為

$$T_3 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\xi}{(1 - \xi^3)^{1/3}}.$$

這個瑕積分收斂：由於在 $[0,1]$ 上 $1 - \xi^3 = (1 - \xi)(1 + \xi + \xi^2) \geq 1 - \xi$，被積函數至多為 $(1 - \xi)^{-1/3}$，而後者在 $[0,1]$ 上的積分為 $\frac{3}{2}$。又由於被積函數在 $(0,1)$ 上嚴格小於 $(1 - \xi^2)^{-1/2}$，

$$T_3 < \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\xi}{(1 - \xi^2)^{1/2}} = \Big[\arcsin \xi\Big]_0^1 = \tfrac{1}{2}\pi.$$

所以 $n = 3$ 的解在時刻 $T_3 < \frac{1}{2}\pi$ 到達 $x = 1$，這正是所要證明的。（一旦到達，它就停留在 $x = 1$，因為斜率為 0，而且不可能變成負數。）

驗算

- 代回原式：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1 - \mathrm{e}^{-t}) = \mathrm{e}^{-t} = 1 - x$，而對 $0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$ 有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin t = \cos t = (1 - \sin^2 t)^{1/2}$。以數值方法（龍格—庫塔法，Runge–Kutta）解各方程，所得結果與這些公式吻合。
- 數值上，$T_3 \approx 1.2092$，明顯小於 $\frac{1}{2}\pi \approx 1.5708$。事實上 $T_3 = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ 是準確值（見下文），兩者吻合至小數點後七位。
- 在高度 $x = 0.9$，三個時間分別為 $-\ln 0.1 \approx 2.30$、$\arcsin 0.9 \approx 1.12$ 和 $t_3(0.9) \approx 0.98$，次序與預測相符。

常見錯誤

- 只說「斜率較大，所以曲線較高」，卻沒有指出所比較的是同一高度上的斜率，而不是同一時刻的斜率。改為把 t 看成 x 的函數，論證才站得住腳。
- 寫出 $(1-\sin^2 y)^{1/2} = \cos y$ 而沒有說明為何 $\cos y \geq 0$：這需要 $0 \leq y \leq \frac{1}{2}\pi$。
- 把 $x = \sin t$ 延續到 $t = \frac{1}{2}\pi$ 之後：在那裏它會遞減，但方程規定 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t \geq 0$。

STEP 之外

解在有限時間內到達 $x = 1$，然後永遠停留在 $x = 1$，原因是 $(1-x^n)^{1/n}$ 在 $x = 1$ 處不滿足利普希茨（Lipschitz）條件；微分方程（differential equation）的唯一性定理（uniqueness theorem）正是在這裏失效（當 $n = 2$ 時，$x = 1$ 和 $x = \sin t$ 都通過 $(\frac{1}{2}\pi, 1)$）。到達時間是一個 Beta 函數（Beta function）：代入 $u = \xi^n$ 可得 $T_n = \frac{1}{n}B(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}) = \dfrac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$，當 $n = 2$ 時為 $\frac{1}{2}\pi$，當 $n = 3$ 時為 $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$，並且當 $n \to \infty$ 時遞減趨向 1。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（基礎微分方程教科書）討論了解的存在性與唯一性，以及解的比較。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。